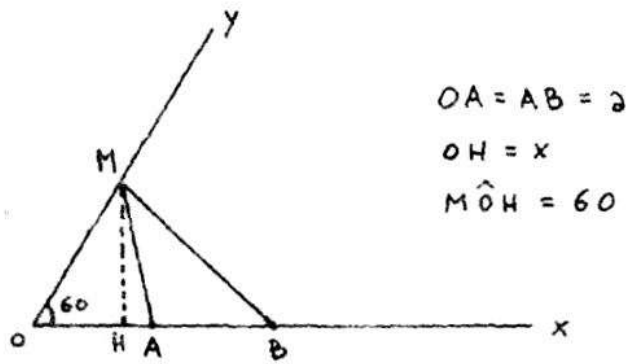
Luglio 1931

L'angolo xOy **è ampio 60° e sul lato Ox sono dati due punti A e B, in modo che OB sia doppio di OA. Determinare sul lato Oy un punto M tale che le sue distanze da A e B abbiano un rapporto k.**
Discutere i risultati e, dopo aver determinato su Oy anche i punti M' e M" per i quali è massimo o minimo il rapporto k, far vedere che i punti A, B, M', M" appartengono ad una circonferenza.
E' in facoltà del candidato di risolvere la prima parte del problema per via geometrica.



Risulta

$$\frac{MH}{OH} = \operatorname{tg} 60° \quad \rightarrow \quad MH = x\sqrt{3}$$

Consideriamo ora un riferimento cartesiano ortogonale con l'origine in O, l'asse x coincidente con la semiretta Ox, e la semiretta Oy nel primo quadrante.
Le coordinate di A, B, M sono

$$A \equiv (a;0) \qquad B \equiv (2a;0) \qquad C \equiv \left(x; x\sqrt{3}\right)$$

E perciò

$$\begin{cases} MA = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \sqrt{(a-x)^2 + 3x^2} \\ MB = \sqrt{MH^2 + BH^2} = \sqrt{(2a-x)^2 + 3x^2} \end{cases}$$

Imponendo la condizione del problema, si ha

$$\frac{MA}{MB} = k$$

Con k > 0 perché rapporto fra due segmenti. Cioè

$$\frac{\sqrt{(a-x)^2 + 3x^2}}{\sqrt{(2a-x)^2 + 3x^2}} = k$$

$$\sqrt{(a-x)^2 + 3x^2} = k\sqrt{(2a-x)^2 + 3x^2}$$

$$\boxed{4x^2(1-k^2) - 2ax(1-2k^2) + a^2(1-4k^2) = 0}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo $x^2 = y$

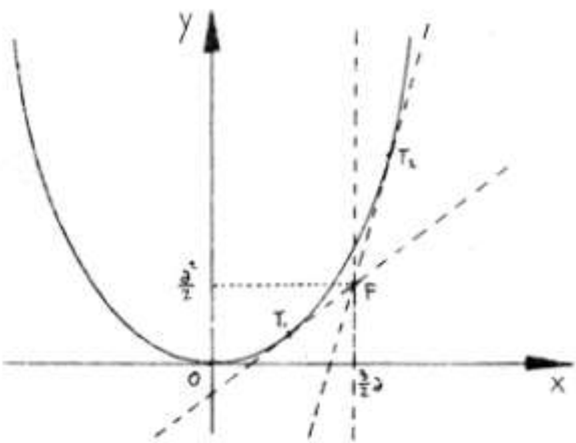
Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{a}{2}\dfrac{1-2k^2}{1-k^k} \end{cases}$$

Che è una parabola con vertice nell'origine, concavità verso l'alto, e un fascio di rette passanti tutte per il punto

$$F \equiv \left(\frac{3}{2}a; \frac{a^2}{2} \right)$$

Ottenuto assegnando a a k^2 due valori arbitrari (per esempio ½ e ¼) e risolvendo il sistema delle due rette così isolate.



La retta generica del fascio ha due intersezioni reali con la parabola quando

$$\frac{\Delta}{4} = a^2\left(1-2k^2\right)^2 - 4a^2\left(1-k^2\right)\left(1-4k^2\right) \geq 0$$

$$-12k^4 + 16k^2 - 3 \geq 0$$

$$\frac{4-\sqrt{7}}{6} \leq k^2 \leq \frac{4+\sqrt{7}}{6}$$

Solo quando $k^2 = 1$ la retta è verticale e ha una sola intersezione con la parabola. Essendo poi $k > 0$ possiamo scrivere

$$\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{6}} \leq k \leq \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{6}}$$

$$\boxed{(1) \qquad \frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{6} \leq k \leq \frac{\sqrt{21}+\sqrt{3}}{6}}$$

Per valori di k compresi in tale intervallo il problema ammette due soluzioni.

I valori minimo e massimo di k sono quindi gli estremi dell'intervallo fornito dalla (1)

In loro corrispondenza si ottiene

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{6} & \rightarrow \quad k^2 = \dfrac{4-\sqrt{7}}{6} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{a\left(3-\sqrt{7}\right)}{2} \\ k = \dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{3}}{6} & \rightarrow \quad k^2 = \dfrac{4+\sqrt{7}}{6} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{a\left(3+\sqrt{7}\right)}{2} \end{cases}$$

E perciò i due punti M' e M'' hanno coordinate

$$M' \equiv \left(a\,\frac{3+\sqrt{7}}{2} ; a\,\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{21}}{2} \right)$$

$$M'' \equiv \left(a\,\frac{3-\sqrt{7}}{2} ; a\,\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{21}}{2} \right)$$

Infine, come si può verificare, i quattro punti A, B, M', M'' si trovano su una stessa circonferenza avente centro nel punto

$$C \equiv \left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\sqrt{3} \right)$$

Cioè sulla semiretta Oy, nel punto medio del segmento M'M'' e con raggio pari a

$$r = a\sqrt{7}$$