

Settembre 1931

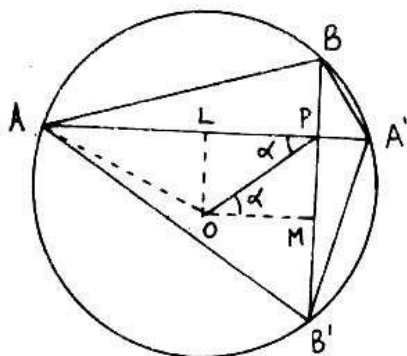
Per un punto P interno ad una circonferenza di centro O e raggio r , si conducono due rette perpendicolari fra loro e che incontrano la circonferenza, la prima nei punti A e A' , la seconda nei punti B e B' .

Posto $OP = a$ e l'ampiezza dell'angolo $OPA = \alpha$ esprimere in funzione dei due parametri a ed α l'area del quadrilatero convesso determinato dai quattro punti A, B, A', B' .

Inoltre, supposto prima costante a e variabile α , e poi α costante e variabile a , determinare nell'un caso e nell'altro per quali valori del parametro variabile l'area del quadrilatero risulta uguale a un numero dato k^2 .

Dire anche quando è che l'area in ciascuno dei due casi diventa massima o minima.

E' in facoltà del candidato di trattare il problema anche nell'ipotesi che il punto P sia esterno alla circonferenza.



$$AO = r$$

$$OP = a \quad \text{con } a < r$$

$$\widehat{OPA} = \alpha$$

Le grandezze letterali indicate a fianco della figura precedente sono sufficienti a determinare il problema e non è quindi necessario introdurre nuove incognite x ed y .

Nel triangolo OLP è

$$LP = a \cos \alpha$$

$$OL = a \sin \alpha$$

$$AL = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$$

$$AA' = 2\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$$

E' inoltre

$$OM = LP = a \cos \alpha$$

$$MB = \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \alpha}$$

$$BB' = 2\sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \alpha}$$

L'area del quadrilatero è data dal semiprodotto delle diagonali per il seno di uno degli angoli da esse formati. Nel nostro caso esse sono perpendicolari fra loro e $\sin 90^\circ = 1$.

Ed ora applicando la condizione del problema avremo

$$\frac{AA' \cdot BB'}{2} = k^2$$

$$\frac{2\sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \cdot 2\sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{2} = k^2$$

$$2\sqrt{r^4 - a^2 r^2 \cos^2 \alpha - a^2 r^2 \sin^2 \alpha + a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = k^2$$

$$2\sqrt{r^4 - a^2 r^2 + a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = k^2$$

$$4r^4 - 4a^2 r^2 + 4a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - k^4 = 0$$

$$a^4 (\sin 2\alpha)^2 - 4a^2 r^2 + 4r^4 - k^4 = 0$$

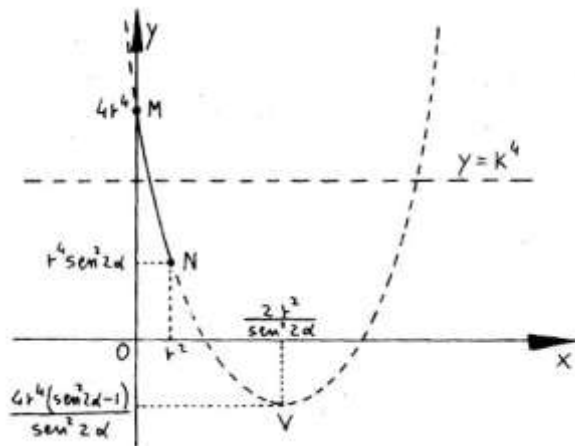
$$(1) \quad \begin{aligned} a^4 \sin^2 2\alpha - 4a^2 r^2 + 4r^4 - k^4 &= 0 \\ 0 \leq a &\leq r \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{cases} a^2 = x \\ k^4 = y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \sin^2 2\alpha - 4r^2 x + 4r^4 \\ y = k^4 \end{cases}$$



L'arco utile di parabola, cioè quello che soddisfa la limitazione è quello con estremi M ed N.

L'intersezione con la retta generica del fascio, cioè la soluzione, è sempre una soltanto quando (vedi figura)

$$r^4 \sin^2 \alpha \leq k^4 \leq 4r^4$$

Cioè

$$(2) \quad r^2 \sin \alpha \leq k^2 \leq 2r^2$$

Vediamo ora cosa avviene considerando α variabile ed a costante.

Elaborando la (1) e ordinando rispetto a $\sin \alpha$ si ottiene

$$a^4 (4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) - 4a^2 r^2 + 4r^4 - k^4 = 0$$

$$4a^4 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - 4a^2 r^2 + 4r^4 - k^4 = 0$$

$$4a^4 \sin^2 \alpha - 4a^4 \sin^4 \alpha - 4a^2 r^2 + 4r^4 - k^4 = 0$$

$$(3) \quad 4a^4 \sin^4 \alpha - 4a^4 \sin^2 \alpha + 4a^2 r^2 - 4r^4 + k^4 = 0$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

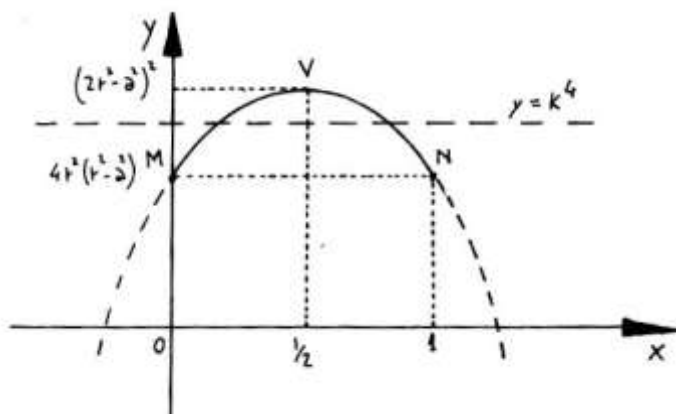
$$\text{cioè} \quad 0 \leq \sin \alpha \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1$$

Ponendo

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = x \\ k^4 = y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = -4a^2x^2 + 4a^4x + 4r^4 - 4a^2r^2 \\ y = k^4 \end{cases}$$



L'arco utile di parabola è ora MN e quindi si avranno sempre due soluzioni per

$$4r^2(r^2 - a^2) \leq k^4 \leq (2r^2 - a^2)^2$$

Cioè

$$(4) \quad 2r\sqrt{r^2 - a^2} \leq k^2 \leq 2r^2 - a^2$$

Poiché l'area del quadrilatero è uguale a k^2 in entrambi i casi considerati il quadrilatero assume area minima o massima in corrispondenza dei valori minimi o massimi di k^2 nelle espressioni (2) e (4).