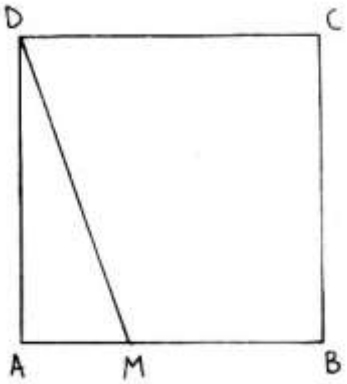
Settembre 1932

Dato il quadrato ABCD di lato a, determinare sul lato AB un punto M tale che sia m il rapporto dei due solidi ottenuti facendo ruotare di un giro completo il trapezio MBCD, una volta intorno alla retta AB, un'altra intorno alla retta AD.



$AB = BC = a$

$AM = x$

con

$0 \leq x \leq a$

Con la rotazione attorno ad AB si ha un solido costituito da un cilindro (con raggio di base BC e altezza AB) meno un cono (con stesso raggio di base e altezza AM). Si ha perciò

$$V_{cilindro} = \pi a^2 \cdot a = \pi a^3$$

$$V_{cono} = \frac{\pi a^2 x}{3}$$

$$V_{solido} = \pi a^3 - \frac{\pi a^2 x}{3} = \frac{\pi a^2 (3a - x)}{3}$$

Con la rotazione attorno ad AB si ha invece un solido costituito dallo stesso cilindro precedente meno un cono avente raggio di base AM ed altezza AB. Si ha

$$V_{cilindro} = \pi a^3$$

$$V_{cono} = \frac{\pi a x^2}{3}$$

$$V_{solido} = \pi a^3 - \frac{\pi a x^2}{3} = \frac{\pi a\left(3a^2 - x^2\right)}{3}$$

Il rapporto dei volumi dei due solidi deve essere uguale ad m, e perciò

$$\frac{\frac{\pi a^2\left(3a - x\right)}{3}}{\frac{\pi a\left(3a^2 - x^2\right)}{3}} = m$$

Semplificando ed ordinando si ottiene

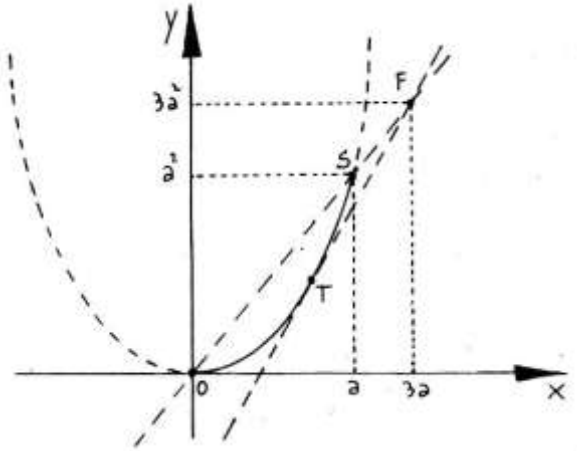
$$\boxed{\begin{array}{c} mx^2 - ax + 3a^2 - 3a^2 m = 0 \\ 0 \le x \le a \end{array}}$$

Ponendo $x^2 = y$ si ottiene

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{a}{m}x - \frac{3a^2}{m} + 3a^2 \end{cases}$$

Cioè un arco di parabola OS e un fascio di rette con centro nel punto $F \equiv \left(3a; 3a^2\right)$ ottenuto dando per esempio ad m i valori 1 e 2.

Le soluzioni del problema sono, al solito, le intersezioni fra l'arco utile OS di parabola e le rette del fascio.



Si noti che il grafico non è in scala. Imponendo alle rette il passaggio per O ed S

$$O \equiv (0;0) \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{3a^2}{m} + 3a^2 \quad \rightarrow \quad m = 1$$

$$O \equiv (a;a^2) \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{a^2}{m} - \frac{3a^2}{m} + 3a^2 \quad \rightarrow \quad m = 1$$

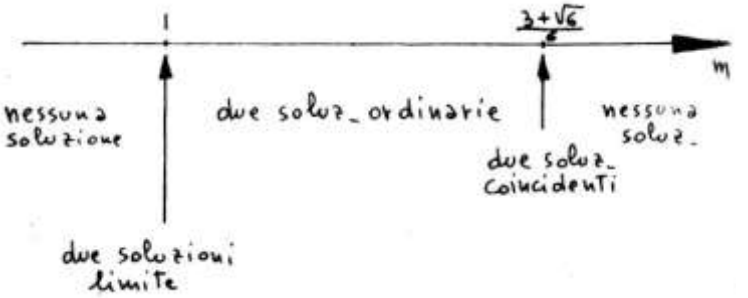
Quindi la stessa retta del fascio che passa per O, passa anche per S.
Imponiamo ora la condizione di tangenza

$$\Delta = a^2 - 4m\left(3a^2 - 3a^2 m\right) = 0$$

$$12m^2 - 12m + 1 = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6}$$

Delle due rette tangenti a noi occorre quella con coefficiente angolare minore, ma il coefficiente angolare è a/m e perciò la tangenza in T corrisponde al valore maggiore di m. L'altra soluzione va scartata.
Avremo quindi sempre due soluzioni


1
$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$
m
nessuna soluzione
due soluz. ordinarie
nessuna soluz.
due soluz. coincidenti
due soluzioni limite