Luglio 1933

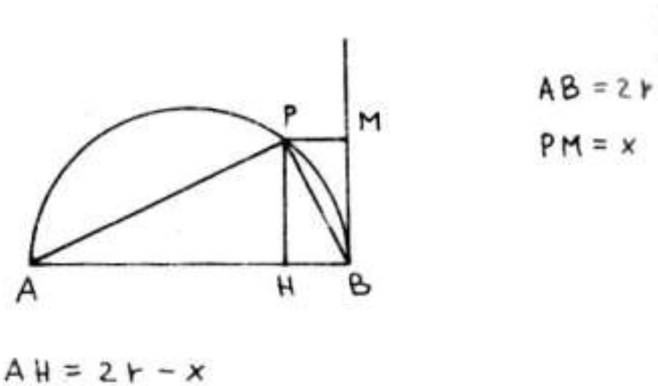
Sopra una circonferenza data, il cui diametro AB misura 2r, determinare un punto P in modo che detta M la proiezione di esso sulla retta perpendicolare in B ad AB, la somma dei due segmenti AP e PM abbia, rispetto alla stessa unità scelta per AB, per misura un numero dato ℓ. Discussione.

E’ in facoltà del candidato di determinare anche, nell’ipotesi che P vari sulla circonferenza, per quale posizione di P è massimo il volume del solido generato dal trapezio APMB in una rotazione completa intorno ad AB, essendo sempre M la proiezione di P sulla perpendicolare in B ad AB.

Indichiamo

$$PM = x \qquad \text{con} \quad 0<x<2r$$

Si ha



Inoltre, per il primo teorema di Euclide,

$$AP^2 = AH \cdot AB \qquad \rightarrow \qquad AP = \sqrt{(2r - x)2r}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{AP + PM}{AB} = \ell \qquad \rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2r(2r - x)} + x}{2r} = \ell$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}(1) & \sqrt{2r(2r-x)}+x=2\ell r \\ & 0<x<2r\end{array}}$$

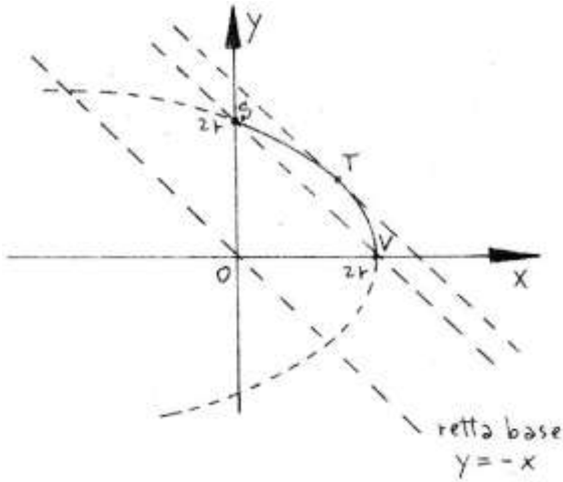
Che è l'equazione parametrica da discutere. Ponendo

$$\sqrt{2r(2r-x)}+x=y \qquad \text{con} \qquad y\geq 0$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} y=-xr+2\ell r \\ x=-\dfrac{1}{2r}y^2+2r \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = -1 e un arco di parabola VS con asse coincidente con l'asse x, vertice in V e concavità volta verso sinistra.



La retta del fascio passa per il punto S quando

$$2r=0+2\ell r \qquad \rightarrow \qquad \ell=1$$

E passa per V quando

$$0=-2r+2\ell r \qquad \rightarrow \qquad \ell=1$$

Quindi la stessa retta passa sia per V che per S.

Calcoliamo ora quando la retta è tangente nel punto T. Eliminando la x nel sistema, abbiamo

$$\begin{cases} y = -xr + 2\ell r \\ x = -\dfrac{1}{2r} y^2 + 2r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2ry + 4\ell r^2 - 4r^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = r^2 - \left(4\ell r^2 - 4r^2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ell = \frac{5}{4}$$

Ma le soluzioni corrispondenti agli estremi, come mostra la (1), non sono accettabili. E perciò il problema ammette due soluzioni quando

$$\boxed{1 < \ell \le \frac{5}{4}}$$

Rispondiamo alla domanda facoltativa cominciando a calcolare il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il trapezio APBM attorno ad AB.
Il solido è formato da un cilindro con raggio di base PH e altezza PM, più un cono con stesso raggio di base e altezza AH.
Applicando il secondo teorema di Euclide si ottiene

$$PH^2 = AH \cdot HB \quad \rightarrow \quad PH^2 = x(2r - x)$$

E perciò il volume del cilindro è

$$V_1 = \pi \cdot PH^2 \cdot HB = \pi x(2r - x) \cdot x = \pi x^2 (2r - x)$$

Mentre il volume del cono è

$$V_2 = \frac{\pi \cdot PH^2 \cdot AH}{3} = \frac{\pi x(2r - x) \cdot (2r - x)}{3} = \frac{\pi x(2r - x)^2}{3}$$

Il volume di tutto il solido è dunque

$$V = V_1 + V_2$$

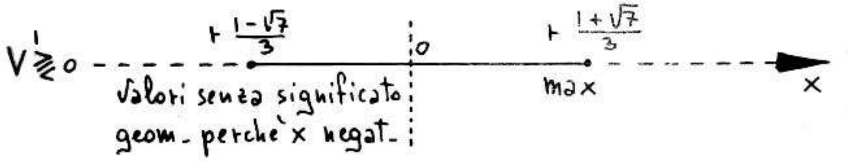
$$V = \pi x^2 (2r - x) + \frac{\pi x(2r - x)^2}{3}$$

$$V = -\frac{2}{3}\pi x^3 + \frac{2}{3}\pi r x^2 + \frac{4}{3}\pi r^2 x$$

La derivata di V rispetto ad x è

$$V' = \frac{2}{3}\pi\left(-3x^2 + 2rx + 2r^2\right)$$

E studiandone il segno si ottiene



Il solido assume quindi volume massimo per

$$\boxed{x = r\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$$