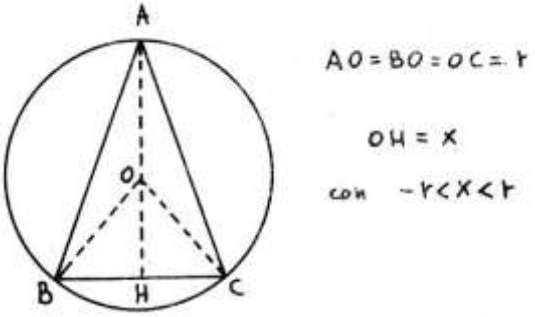
Settembre 1933

Determinare la base e l'altezza di un triangolo isoscele, conoscendone la somma s e sapendo che il triangolo è inscritto in una circonferenza il cui raggio misura r. Discussione.
Il candidato può anche determinare il triangolo per il quale risulti massima la somma della base e dell'altezza.



Si ha

$$AH = r + x$$

$$HC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$BC = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Applicando la relazione del problema, si ha

$$AH + BC = a$$

$$\boxed{\begin{array}{c} r + x + 2\sqrt{r^2 - x^2} = s \\ -r < x < r \end{array}}$$

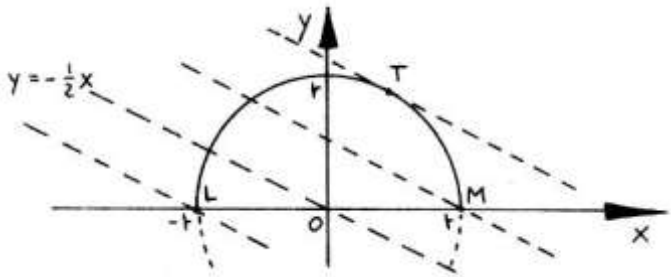
Che è l'equazione parametrica da discutere. Poniamo

$$\sqrt{r^2 - x^2} = y \qquad \text{con} \quad y \geq 0$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{s - r}{2} \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele (con s come parametro) e un arco di circonferenza



Imponiamo il passaggio del fascio di rette per L e M

$$L\equiv(-r;0) \quad \rightarrow \quad -r=s-r \quad \rightarrow \quad s=0$$

$$M\equiv(r;0) \quad \rightarrow \quad r=s-r \quad \rightarrow \quad s=2r$$

E la condizione di tangenza (eliminando la y dal sistema)

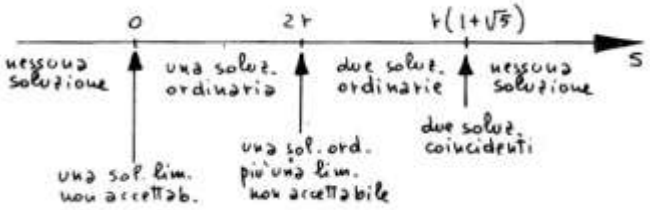
$$5y^2-4y(s-r)+s^2-2rs=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=4(s-r)^2-5(s^2-2rs)=0$$

$$s=r(1\pm\sqrt{5})$$

Si ha la tangenza in T in corrispondenza del segno positivo (perché il termine noto della retta in forma esplicita corrisponde al segmento da essa staccato sull'asse y, e questo deve essere positivo per la retta passante per T).

Concludendo



Il valore massimo cercato corrisponde al valore massimo del parametro, e cioè

$$\boxed{s=r(1+\sqrt{5})}$$