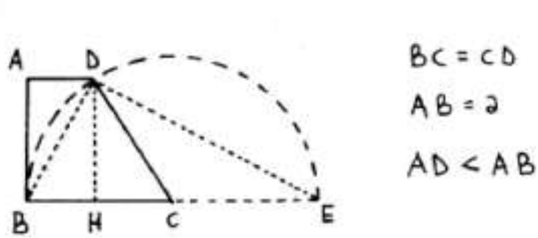
Luglio 1934 – Primo problema

Nel trapezio convesso ABCD le basi AD e BC sono perpendicolari al lato AB; inoltre la base BC è uguale al lato CD e la base AD è minore del lato AB. Determinare le misure dei lati BC, CD, DA sapendo che la misura del lato AB è a e che il trapezio è equivalente al triangolo rettangolo di cui un cateto è uguale ad AB e l'altro ha per misura k.
Discutere i risultati.



Poniamo AD = x e poiché deve essere AD < AB si ha

$$0 < x < a$$

Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo BDE, si ottiene

$$DH^2 = BH \cdot HE \qquad \rightarrow \qquad HE = \frac{a^2}{x}$$

È allora

$$BE = x + \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

$$BC = \frac{x^2 + a^2}{2x}$$

Imponendo la relazione del problema (area trapezio uguale all'area del triangolo), avremo

$$\frac{(AD + BC)AB}{2} = \frac{AB \cdot k}{2}$$

Semplificando si ottiene

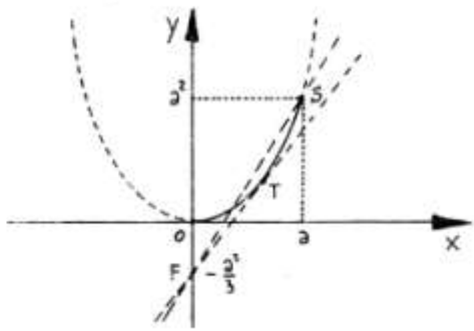
$$AD + BC = k \quad \text{cioè} \quad x + \frac{x^2 + a^2}{2x} = k$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3x^2 - 2kx + a^2 = 0 \\ 0 < x < a \end{array}}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. Ponendo $x^2 = y$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{2k}{3}x - \dfrac{a^2}{3} \\ y = x^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro in $F \equiv \left(0; -\dfrac{a}{3}\right)$ come si ottiene dando al solito due valori arbitrari a k (per esempio 0 ed 1) e risolvendo il sistema formato dalle due rette, ed una parabola di cui dovremo considerare solo l'arco OS.



Imponendo il passaggio per S e per O, si ha

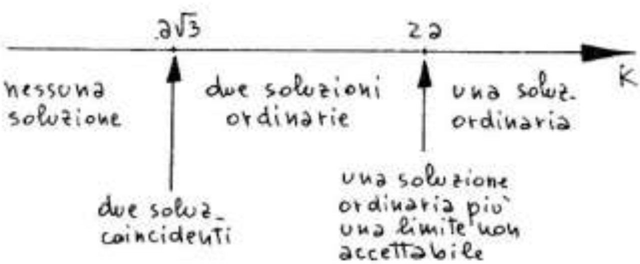
$$a^2 = \frac{2k}{3}a - \frac{a^2}{3} \qquad \to \qquad k = 2a$$

$$0 = \frac{2k}{3}0 - \frac{a^2}{3} \qquad \to \qquad k = \frac{a^2}{0 \cdot 2} = \infty$$

E, imponendo la tangenza

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 3a^2 = 0 \qquad \to \qquad k = \pm a\sqrt{3}$$

Dove la soluzione negativa è da scartare perché la retta passante per T ha coefficiente angolare positivo.
Concludendo avremo



Luglio 1934 – Secondo problema

L'equazione di una curva è

$$y = \frac{1}{4}\left(5 + 8x - 4x^2\right)$$

Determinare

a) **I punti d'intersezione della curva con gli assi**
b) **Il punto di ordinata massima**
c) **L'area del triangolo OMN che ha il vertice nell'origine e gli altri due (M ed N) nei punti della curva aventi entrambi per ordinata 0,6875**

E' in facoltà del candidato di dire anche fra tutti i triangoli aventi un vertice in O e gli altri due in punti della curva di uguale ordinata positiva, quale è quello di ordinata massima.

La funzione, ordinata, viene facilmente riconosciuta essere una parabola

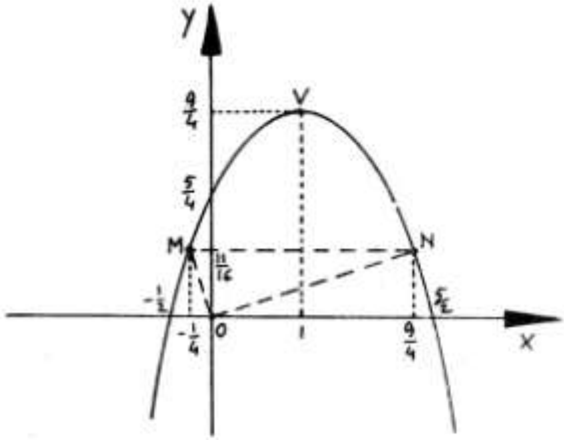
$$y = -x^2 + 2x + \frac{5}{4}$$

Le intersezioni con gli assi hanno coordinate

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

E il vertice ha coordinate

$$V \equiv \left(1; \frac{9}{4}\right)$$



Poiché

$$0,6875 = \frac{6875}{10000} = \frac{11}{16}$$

Calcoliamo le ascisse dei punti M ed N ponendo $y = \frac{11}{16}$ nell'equazione della parabola. Si ha

$$\frac{11}{16} = -x^2 + 2x + \frac{5}{4} \qquad \rightarrow \qquad 16x^2 - 32x - 9 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} M \equiv \left(-\frac{1}{4}; \frac{11}{16} \right) \\ N \equiv \left(\frac{9}{4}; \frac{11}{16} \right) \end{array} \right.$$

Risulta

$$MN = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

E quindi l'area del trapezio è

$$\boxed{S = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{11}{16}}{2} = \frac{55}{64}}$$

Rispondiamo ora alla parte facoltativa indicando con la variabile t (t > 0) l'ordinata dei punti M ed N. Le loro ascisse sono

$$t=-x^2+2x+\frac{5}{4}$$

$$4x^2-8x+4t-5=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{9-4t}}{2}$$

E perciò

$$\left|\begin{array}{l} M\equiv\left(\dfrac{2-\sqrt{9-4t}}{2};t\right) \\ N\equiv\left(\dfrac{2+\sqrt{9-4t}}{2}\right)\end{array}\right.$$

Risulta quindi

$$MN=\frac{2+\sqrt{9-4t}}{2}-\frac{2-\sqrt{9-4t}}{2}=\sqrt{9-4t}$$

E l'area del triangolo è

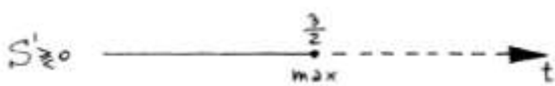
$$S=\frac{1}{2}t\sqrt{9-4t}$$

Calcoliamo la derivata

$$S'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9-4t}+t\frac{-4}{2\sqrt{9-4t}}\right)$$

$$S'=\frac{1}{2}\frac{9-6t}{\sqrt{9-4t}}$$

Studiandone il segno si ha



Ed il massimo cercato si ottiene per $t=\frac{3}{2}$. In corrispondenza è

$$+\begin{cases} M \equiv \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{2} \right) \\ N \equiv \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{2} \right) \end{cases} \qquad S = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$