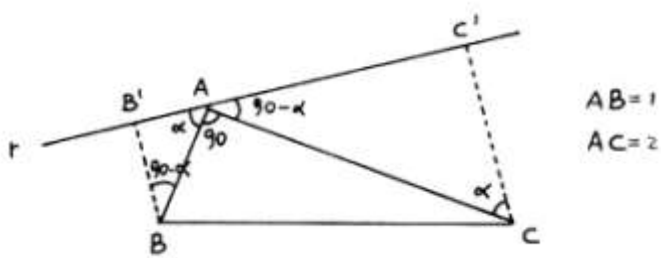
Settembre 1934 – Primo problema

I cateti AB e AC del triangolo rettangolo BAC hanno per misura rispettivamente 1 e 2. Condurre per il vertice A la retta r, non secante il triangolo, in modo che, sempre rispetto al segmento AB, sia k la misura del segmento B'C' che si ottiene proiettando ortogonalmente su di essa l'ipotenusa BC. Discutere i risultati e far vedere:

1) **Che per** $k = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **si ha una sola soluzione data da una retta inclinata di 60° su AC.**
2) **Che per** $k = \frac{3}{\sqrt{2}}$ **si hanno due soluzioni, delle quali una è data da una retta r inclinata di 45°.**

E' in facoltà del candidato di risolvere e discutere il problema anche per via geometrica e far vedere che delle due soluzioni che si hanno per $k = \frac{3}{\sqrt{2}}$**, quella data dalla retta r corrisponde al massimo dell'area del trapezio BCC'B'.**



Poniamo

$$\begin{cases} AB' = x & \text{con} \quad 0 \le x \le 1 \\ AC' = y & \text{con} \quad 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$AB' + AC' = k$$

$$\boxed{(1) \qquad x+y=k}$$

Poiché abbiamo impostato il problema con due incognite, occorre utilizzare una seconda relazione da abbinare alla (1).
Essa scaturisce dall'osservazione che i due triangoli AB'B e CC'A sono simili; impostando una similitudine fra lati corrispondenti, avremo

AB : BB' = AC : AC'

Ed essendo

$$BB' = \sqrt{1-x^2}$$

Sostituendo otteniamo

$$1 : \sqrt{1-x^2} = 2 : y$$

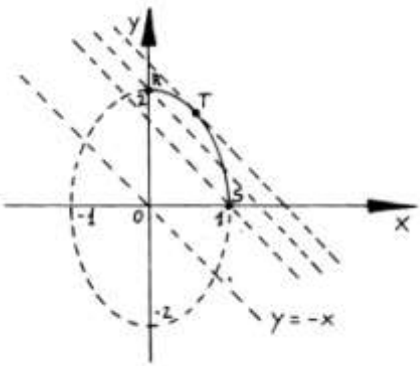
In essa il prodotto dei medi deve essere uguale al prodotto degli estremi

$$2\sqrt{1-x^2} = y$$

$$4\left(1-x^2\right) = y^2$$

$$\boxed{(2) \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}$$

La (1) è un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = -1 mentre la (2) è una ellisse con centro in O, assi lunghi 2 e 4, di cui dovremo considerare soltanto l'arco utile RS.



Imponiamo il passaggio delle rette per R ed S.

$$R \equiv (0;2) \quad \rightarrow \qquad 0+2=k \quad \rightarrow \quad k=2$$

$$S \equiv (1;0) \quad \rightarrow \qquad 1+0=k \quad \rightarrow \quad k=1$$

E la tangenza con l'ellisse

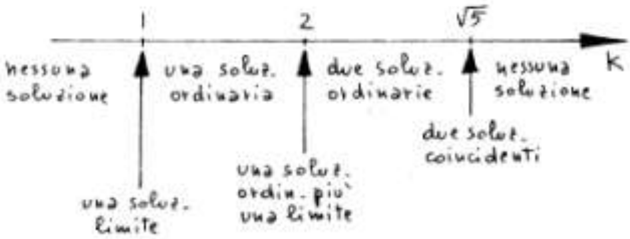
$$\begin{cases} 4x^2+y^2=4 \\ y=k-x \end{cases} \quad \rightarrow \quad 4x^2+(k-x)^2-4=0$$

$$\boxed{(3) \quad 5x^2-2kx+k^2-4=0}$$

$$\frac{\Delta}{4}=k^2-5\left(k^2-4\right)=0$$

$$k=\pm\sqrt{5}$$

La soluzione negativa va scartata perché k deve essere positivo. Quindi, concludendo



Passiamo ora alle richieste successive ponendo

$$k=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cong 1{,}87$$

Dalla discussione già sappiamo che dobbiamo attenderci una sola soluzione accettabile. Poniamo infatti $k=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ e risolviamo

$$5x^2-2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4=0$$

$$20x^2-4x\left(2+\sqrt{3}\right)+4\sqrt{3}-9=0$$

$$x=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)^2-20\left(4\sqrt{3}-9\right)}}{10}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}\pm 2\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}}{10}=\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{4-3\sqrt{3}}{10} \quad \text{da scartare, è} < 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Risulta quindi

$$\begin{cases} AB' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ BB' = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

E perciò

$$BAB' = \alpha = 30°$$

$$CAC' = 90° - \alpha = 60°$$

Ponendo invece

$$k = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 2{,}12$$

Sappiamo dalla discussione che dobbiamo attenderci due soluzioni accettabili. Sostituendo nella (3) si ha

$$5x^2 - 2\frac{3\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = 0$$

$$10x^2 - 6x\sqrt{2} + 1 = 0$$

$$x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-10}}{10} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{10} & \text{soluz. ordinaria} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Per $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si ha

$$\begin{cases} AB' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ BB' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

E perciò

$$BAB' = CAC' = 45°$$

Determiniamo infine l'area del trapezio BCC'B'. Poiché

$$BB' = \sqrt{1-x^2}$$

$$CC' = \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-\left(4-4x^2\right)} = 2x$$

$$B'C' = x + y = x + 2\sqrt{1-x^2}$$

Si ha

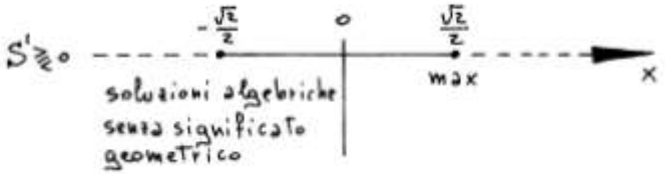
$$S = \frac{\left(BB'+CC'\right)\cdot B'C'}{2} = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}+2x\right)\left(x+2\sqrt{1-x^2}\right)}{2}$$

$$\boxed{(4) \qquad S = \frac{5}{2}x\sqrt{1-x^2}+1}$$

Che esprime l'area del trapezio in funzione della variabile x. Derivando si ottiene

$$S' = \frac{5}{2}\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

E, studiandone il segno,



Il trapezio ha dunque area massima quando $\alpha = 45°$

Settembre 1934 – Secondo problema

Rispetto a due assi cartesiani ortogonali, l'equazione di una curva è della forma

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

Determinare a, b, c sapendo che la curva passa per i due punti (0,1) e (1,0) e che in quest'ultimo è tangente ad una retta inclinata di un angolo ampio 45° sull'asse delle x.

Determinare anche:

1) **L'altro punto di intersezione con l'asse delle x e la direzione della tangente in esso alla curva.**
2) **Il punto della curva con ordinata minima.**
3) **Come deve essere scelto m affinché la retta y = mx passante per l'origine intersechi la curva.**

Il problema ha una impostazione molto facile che richiede soltanto concetti di geometria analitica. Imponiamo all'equazione generica

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

di passare per i punti A = (0,1) e B = (1,0). Si ottiene

$$\begin{cases} 1 = c \\ 0 = a + b + c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 - a \end{cases}$$

Abbiamo usato due condizioni ma i parametri sono tre e quindi nell'equazione generica rimane uno dei tre parametri

$$y = a\,x^2 - (1 + a)\,x + 1$$

l'equazione della retta passante per B è inclinata di 45° rispetto all'asse x, ed è

$$y = x - 1$$

ora possiamo eliminare anche il terzo parametro imponendo la condizione di tangenza fra parabola e retta. Eliminando la y abbiamo

$$x - 1 = ax^2 - (1 + a)x + 1$$

$$ax^2 - (2 + a)x + 2 = 0$$

$$\Delta = \left(2 + a\right)^2 - 8a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

E quindi l'equazione della parabola è

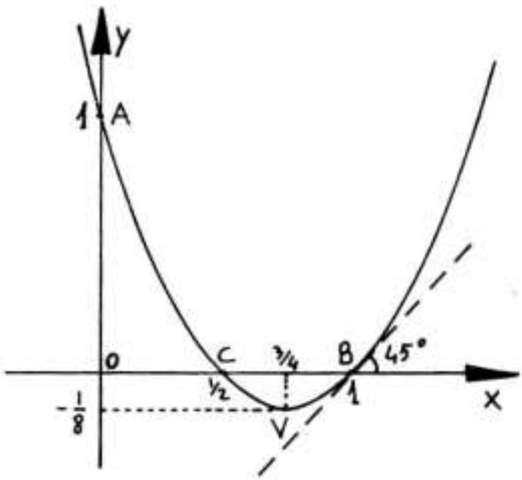
$$\boxed{y = 2x^2 - 3x + 1}$$

Le sue intersezioni con l'asse x sono

$$y = 2x^2 - 3x + 1 \quad \rightarrow \quad x \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad C \equiv \left(\dfrac{1}{2}; 0 \right) \\ = 1 \quad \rightarrow \quad B \equiv (1; 0) \end{array} \right.$$

E il vertice ha coordinate

$$V \equiv \left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8} \right)$$



Per simmetria la retta tangente in C è inclinata di 45° verso il basso, e deve avere coefficiente angolare m = -1.
La sua equazione è

$$y - 0 = -1\left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \rightarrow \quad y = -x + \frac{1}{2}$$

Il punto della parabola con ordinata minima è il suo vertice V.
La retta $y = mx$ è una retta generica passante per O. Le rette del fascio tangenti alla parabola si ricavano semplicemente imponendo la condizione di tangenza

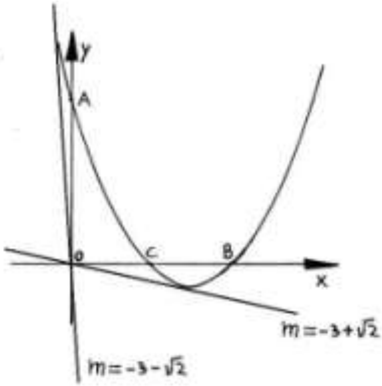
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ y = mx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - (3 + m)x + 1 = 0$$

$$\Delta = (3+m)^2 - 8 = 0$$

$$m^2 + 6m + 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = \left(-3+\sqrt{2}\right)x \\ y = \left(-3-\sqrt{2}\right)x \end{cases}$$

Le rette sono entrambe rivolte verso il basso perché il loro coefficiente angolare è negativo in entrambi i casi.



Partendo dalla retta $y = \left(-3+\sqrt{2}\right)x$ aumentando il coefficiente angolare fino ad infinito si hanno sempre due intersezioni e quindi due soluzioni (escluso l'infinito perché corrisponde ad una sola soluzione).
Partendo invece dalla retta $y = \left(-3-\sqrt{2}\right)x$ e diminuendo il coefficiente angolare fino a meno infinito si hanno sempre due intersezioni e quindi due soluzioni (escluso l'infinito perché corrisponde ad una sola soluzione).
Per tutti gli altri valori di m non ci sono soluzioni. Riassumendo, al variare di m si ha la situazione seguente.