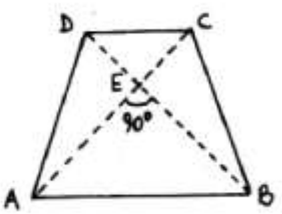
Luglio 1935 – Primo problema

Di un trapezio convesso isoscele, le cui diagonali sono perpendicolari fra loro, si conosce il perimetro 2p e si sa che è equivalente a un quadrato di lato lungo m.
Determinare le misure dei segmenti in cui ciascuna diagonale divide l'altra e discutere i risultati.
È in facoltà del candidato di dare anche la costruzione geometrica derivandola dalla formula ottenuta o, meglio, osservando che il problema può ricondursi a quello della costruzione di un triangolo rettangolo del quale si siano trovati l'ipotenusa e la somma dei cateti.



poniamo
$EC = x$ con $x \geq 0$
$EB = y$ con $y \geq 0$

Le lunghezze dei lati del trapezio sono

$$\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ AB = \sqrt{2y^2} = y\sqrt{2} \\ CD = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \end{cases}$$

E quindi il suo perimetro è

$$2\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = 2p$$

$$\boxed{(1) \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2}\left(x + y\right) = 2p}$$

Sappiamo ancora che l'area del trapezio deve essere uguale a m^2. Dalla trigonometria sappiamo che l'area di un quadrilatero è data dal semiprodotto delle sue diagonali, per il seno di uno degli angoli da esse formati.
Nel nostro caso le diagonali sono perpendicolari fra loro e perciò l'area è data semplicemente dal semiprodotto delle due diagonali.

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = m^2$$

$$\boxed{(2) \qquad \frac{(x+y)^2}{2} = m^2}$$

Le soluzioni del problema corrispondono alle soluzioni del sistema formato dalle (1) e (2).
Il sistema è simmetrico e può essere trasformato in somma e prodotto. Dalla (2) si ha (tralasciando il segno meno perché deve essere $x \geq 0$ e $y \geq 0$)

$$\boxed{(3) \qquad x + y = m\sqrt{2}}$$

Da questa relazione si deduce anche che deve essere

$$\begin{cases} x \leq m\sqrt{2} \\ y \leq m\sqrt{2} \end{cases}$$

E quindi entrambe le incognite sono soggette alla limitazione

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq m\sqrt{2} \\ 0 \leq y \leq m\sqrt{2} \end{cases}$$

Dalla (1) invece, applicando le formule di Waring, si ricava

$$2\sqrt{(x+y)^2 - 2xy} + \sqrt{2}\,(x+y) = 2p$$

In cui, utilizzando la (3), si ha

$$2\sqrt{2m^2 - 2xy} + \sqrt{2} \cdot m\sqrt{2} = 2p$$

$$\sqrt{2m^2 - 2xy} = p - m$$

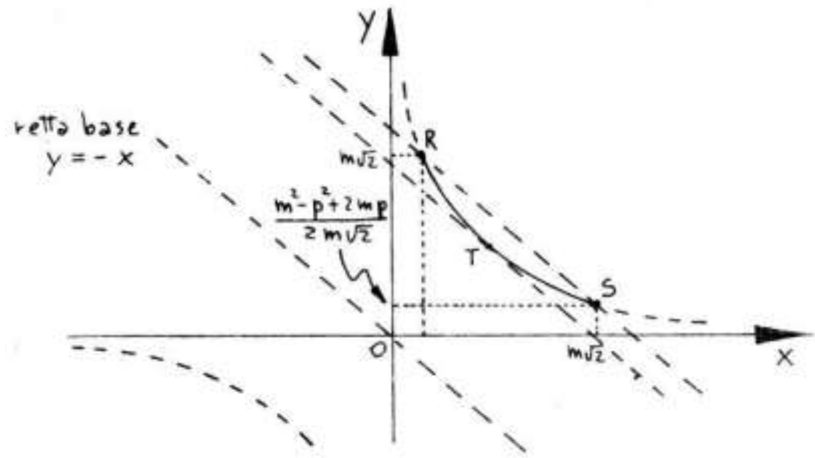
Infine, quadrando,

$$\boxed{(4) \qquad xy = \frac{m^2 - p^2 + 2mp}{2}}$$

La (3) e (4) costituiscono il sistema

$$\begin{cases} x + y = m\sqrt{2} \\ xy = \dfrac{m^2 - p^2 + 2mp}{2} \end{cases}$$

Cioè (il parametro è m) un fascio di rette parallele ed una iperbole equilatera di cui ci interessa solo l'arco utile RS.



La retta del fascio passerà per S (ed R) quando

$$m\sqrt{2}+\frac{m^2-p^2+2mp}{2m\sqrt{2}}=m\sqrt{2}$$

$$\frac{m^2-p^2+2mp}{2m\sqrt{2}}=0$$

$$m^2+2mp-p^2=0$$

$$m=p\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$$

Dove la soluzione negativa va scartata perché deve essere $m > 0$.

Si ha invece la tangenza per

$$\begin{cases} y=m\sqrt{2}-x \\ xy=\dfrac{m^2-p^2+2mp}{2} \end{cases}$$

$$x\left(m\sqrt{2}-x\right)=\frac{m^2-p^2+2mp}{2}$$

$$2mx\sqrt{2}-2x^2=m^2-p^2+2mp$$

$$2x^2-2mx\sqrt{2}+\left(m^2-p^2+2mp\right)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=2m^2-2\left(m^2-p^2+2mp\right)=0$$

$$2p^2-4mp=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{p}{2}$$

Si hanno dunque due soluzioni simmetriche per

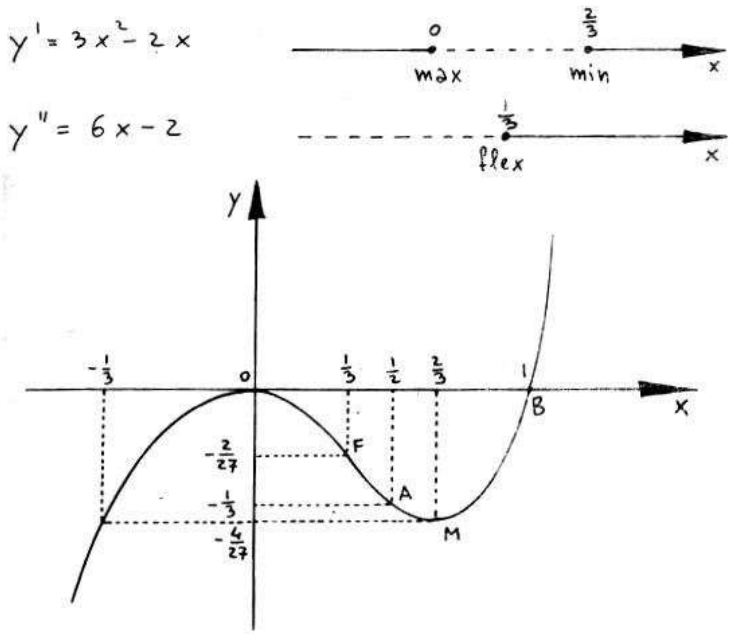
$$p\left(\sqrt{2}-1\right)\leq m\leq\frac{p}{2}$$

E due soluzioni coincidenti per il valore maggiore di p.

Luglio 1935 – Secondo problema

1) **In coordinate cartesiane ortogonali rappresentare la funzione**
$$y = x^3 - x^2$$
E scrivere le equazioni delle tangenti al grafico nei punti in cui esso incontra l'asse x.
2) **Determinare i punti di intersezione della curva con la retta y = mx. Discussione.**
3) **Dato il numero reale a e conoscendo il punto P della curva di ascissa a, determinare le ascisse degli altri due punti P_1 e P_2 della curva che hanno la stessa ordinata di P, e dire per quali valori di a tali ascisse risultano reali.**

La funzione è algebrica razionale intera, di terzo grado, e taglia l'asse x nel punto x = 1, mentre è tangente ad esso nell'origine (punto doppio).
Derivando successivamente, si ha
$$y' = 3x^2 - 2x$$
$$y'' = 6x - 2$$
La curva ha un massimo nell'origine ed un minimo nel punto
$$M \equiv \left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{27} \right)$$
C'è poi un flesso obliquo nel punto
$$F \equiv \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{27} \right)$$
Lo studio dei segni di y' e y'' e il grafico della curva sono nella figura seguente



Poiché

$$f'(0)=0 \quad \text{e} \quad f''(1)=1$$

Le rette tangenti alla curva nei punti O e B sono rispettivamente

$$\begin{cases} y=0 \\ y=x-1 \end{cases}$$

(il grafico non è in scala). La retta $y = mx$ è una retta generica passante per l'origine. Mettendola a sistema con la curva, si ha

$$\begin{cases} y=x^3-x^2 \\ y=mx \end{cases}$$

$$x^3-x^2=mx$$

$$x\left(x^2-x-m\right)=0$$

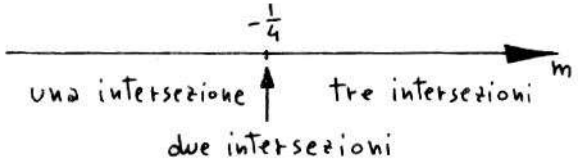
Con una soluzione per x = 0 (l'origine) e altre due soluzioni per

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4m}}{2}$$

Le due soluzioni sono reali quando

$$\Delta = 1 + 4m \geq 0 \qquad m \geq -\frac{1}{4}$$

Nel caso in cui $m = -\frac{1}{4}$ la retta, oltre ad attraversare la curva in O, è tangente ad essa in un altro punto.
Sostituendo tale valore di m nella retta si trova x = ½ cioè la tangenza si ha nel punto A.
Si ha dunque, al variare di m la situazione seguente



Per quanto riguarda l'ultimo quesito si tratta in altre parole, data una generica retta orizzontale, di individuare per quali valori della x tale retta ha tre intersezioni con la curva.
Osservando il grafico risulta evidente che si avranno tre intersezioni per

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$