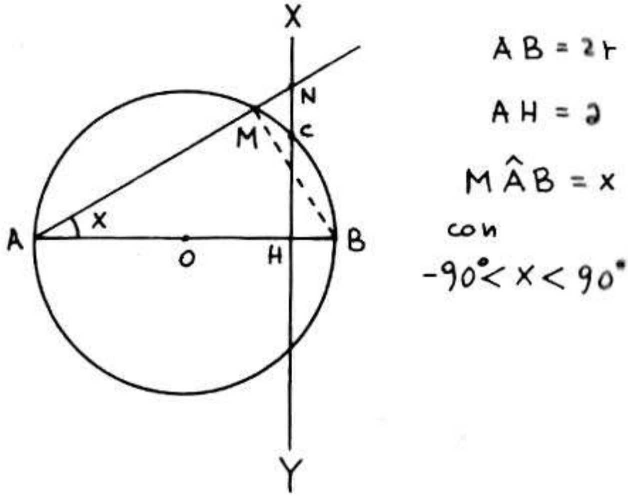
Settembre 1935 – Primo problema

In un piano sono date una circonferenza di diametro AB = 2r, ed una retta XY che la sega ed è perpendicolare ad AB, alla distanza a da A.
Determinare l'ampiezza x dell'angolo che una semiretta uscente da A deve formare con AB, affinché detto M l'altro punto di intersezione della semiretta con la circonferenza, ed N il punto di intersezione di essa con la retta XY, risulti uguale ad un segmento assegnato di misura m, la distanza dei due punti M e N.
E' in facoltà del candidato di considerare anche i casi in cui la retta XY, perpendicolare alla retta AB, sia esterna o tangente alla circonferenza.



Stabiliamo di considerare a > 0 in modo da trattare contemporaneamente i casi in cui la retta XY sia secante, tangente, o esterna alla circonferenza.
Si noti che al variare dell'angolo x può essere AM > AN oppure AM < AN oppure AM = AN.

$$\frac{AH}{AN} = \cos x \quad \rightarrow \quad AN = \frac{a}{\cos x}$$

$$\frac{AM}{AB} = \cos x \quad \rightarrow \quad AM = 2r\cos x$$

E perciò

$$MN = \left| \frac{a}{\cos x} - 2r\cos x \right| = m$$

A causa del modulo si hanno le due equazioni

$$\begin{cases} a - 2r\cos^2 x = m\cos x \\ 2r\cos^2 x - a = m\cos x \end{cases}$$

Che possono essere unificate nell'equazione parametrica

$$\boxed{\begin{array}{c} 2r\cos^2 x \pm m\cos x - a = 0 \\ 0 < \cos x < 1 \end{array}}$$

Ora poniamo in essa

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \cos^2 x = Y \end{cases}$$

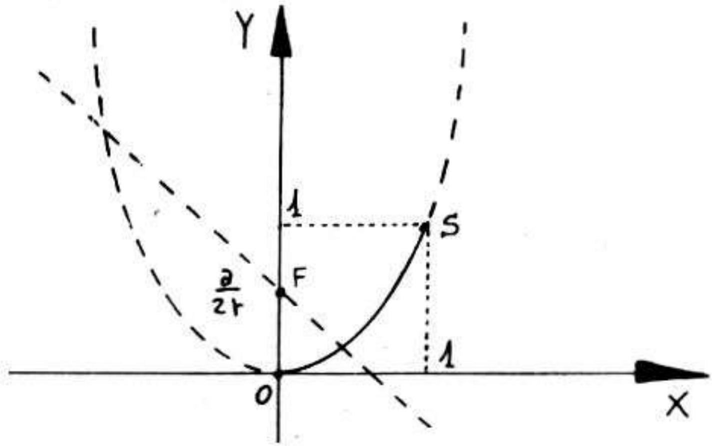
Ed otteniamo il sistema

$$\boxed{\begin{cases} Y = X^2 \\ Y = \pm \frac{m}{2r} X + \frac{a}{2r} \end{cases}}$$

Cioè un arco di parabole, con ascisse comprese fra 0 ed 1, ed un fascio di rette con centro in

$$F \equiv \left(0; \frac{a}{2r} \right)$$

Ottenuto, al solito dando per esempio ad m i valori 0 e 2r, e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute.



Il punto F ha ordinata inferiore o maggiore di S a seconda che la retta XY della figura iniziale, sia interna o esterna alla circonferenza.
La retta del fascio passa per O quando $m = \pm\infty$, e passa per S quando $m = |2r - a|$.
Nel caso in cui AN > AM si ha una soluzione per

$$m \leq 2r - a$$

Mentre quando AN < AM si ha una soluzione per

$$m \geq a - 2r$$

Poiché nel primo e quarto quadrante il coseno assume valori identici, in entrambi i casi si ha una soluzione simmetrica per valori negativi della x.

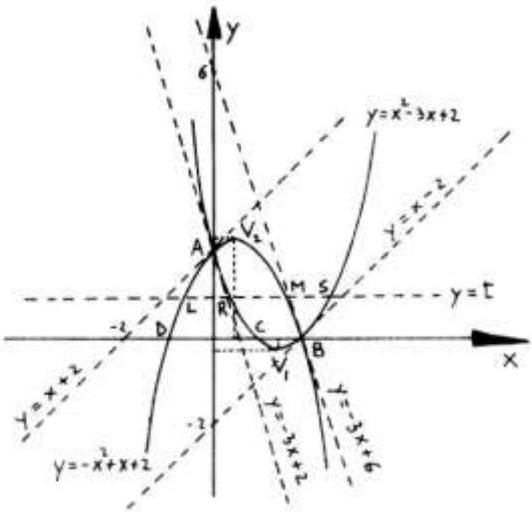
Settembre 1935 – Secondo problema

In coordinate cartesiane ortogonali rappresentare graficamente le funzioni

$$y = x^2 - 3x + 2 \qquad\qquad y = -x^2 + x + 2$$

Delle curve rappresentatrici determinare i punti di intersezione con gli assi coordinati e le tangenti in tali punti, nonché i punti di massimo e di minimo.
Dire anche come deve essere condotta una retta parallela all'asse x, affinché risultino uguali le due corde che la retta stessa determina in ciascuna delle due curve.
E' in facoltà del candidato di calcolare l'area individuata dai due archi delle curve date che hanno per estremi i punti comuni alle due corde stesse.

Le curve sono due parabole e il loro studio dà luogo al grafico seguente



La prima parabola ha vertice in $V_1 \equiv \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ e incontra gli assi in $A \equiv (0;2)$ $\;B \equiv (2;0)$ $\;C \equiv (1;0)$.

La seconda parabola ha vertice in $V_2 \equiv \left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$ e incontra gli assi in $A \equiv (0;2)$ $B \equiv (2;0)$ $D \equiv (-1;0)$.

Senza che sia necessario risolvere il sistema costituito dalle equazioni delle due parabole, risulta evidente che esse si intersecano nei punti A e B.

Derivando la prima parabola si ha

$$y' = 2x - 3$$

e perciò le sue rette tangenti in A e in B sono rispettivamente

$$f'(0) = -3 \quad \rightarrow \quad y = -3x + 2$$

$$f'(2) = 1 \quad \rightarrow \quad y = x - 2$$

Derivando la seconda parabola si ha

$$y' = -2x + 1$$

e perciò le sue rette tangenti in A e in B sono rispettivamente

$$f'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad y = x + 2$$

$$f'(2) = -3 \quad \rightarrow \quad y = -3x + 6$$

Consideriamo ora una generica retta $y = t$ orizzontale. Determiniamo le ascisse dei punti R ed S

$$\begin{cases} y = t \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 - t = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$$

Risulta

$$RS = \frac{3+\sqrt{1+4t}}{2} - \frac{3-\sqrt{1+4t}}{2} = \sqrt{1+4t}$$

In modo analogo calcoliamo le ascisse dei punti L ed M

$$\begin{cases} y = t \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - x + t - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{9-4t}}{2}$$

Risulta

$$LM = \frac{1+\sqrt{9-4t}}{2} - \frac{1-\sqrt{9-4t}}{2} = \sqrt{9-4t}$$

Le due corde devono essere uguali e perciò

$$\sqrt{1+4t} = \sqrt{9-4t} \quad \text{cioè} \quad t = 1$$

Infine l'area della regione racchiusa fra le due parabole è

$$\int_0^2 \left[\left(-x^2 + x + 2 \right) - \left(x^2 - 3x + 2 \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x \right) dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}$$