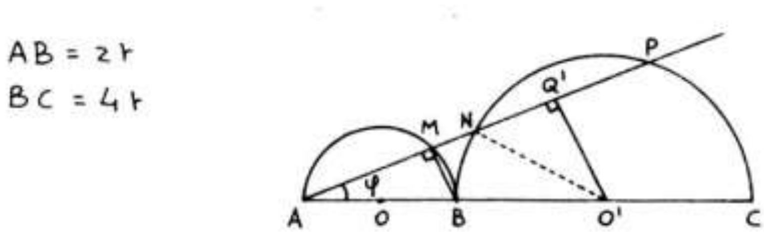
Luglio 1936 – Primo problema

Sopra una retta i due segmenti adiacenti AB e BC di lunghezze rispettive 2r e 4r sono diametri di due circonferenze complanari di centri O e O'.
Una semiretta uscente da A sega le due circonferenze, la prima in M oltre che in A, la seconda in N e P con N più vicino ad M.

Supposta uguale a φ la misura dell'angolo $\widehat{MAB}$ **e detta Q' la proiezione di O' sulla retta AP, determinare le lunghezze dei segmenti O'Q', NQ', AQ', AM e dire come deve essere scelto φ affinché il segmento MN risulti uguale a un segmento dato di lunghezza a.**
Discussione e costruzione geometrica in base alla formula di risoluzione.

Eseguita la figura, iniziamo con il calcolo della lunghezza dei quattro segmenti richiesti



$$\frac{AM}{AB}=\cos\varphi \quad\to\quad AM=2r\cos\varphi$$

$$\frac{AQ'}{AO'}=\cos\varphi \quad\to\quad AQ'=4r\cos\varphi$$

$$\frac{O'Q'}{AO'}=\operatorname{sen}\varphi \quad\to\quad O'Q'=4r\operatorname{sen}\varphi$$

$$NQ'=\sqrt{NO'^2-O'Q'^2}=\sqrt{4r^2-16r^2\operatorname{sen}^2\varphi}=$$

$$=2r\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2\varphi}=2r\sqrt{4\cos^2\varphi-3}$$

Possiamo ora imporre la condizione del problema

$$MN=a \quad\to\quad AQ'-AM-NQ'=a$$

E si ottiene

$$4r\cos\varphi-2r\cos^2\varphi-2r\sqrt{4\cos^2\varphi-3}=a$$

$$\cos\varphi-\sqrt{4\cos^2\varphi-3}=\frac{a}{2r}$$

Il valore minimo che può assumere φ è zero, mentre quello massimo si ha quando la semiretta AM è tangente alla circonferenza più grande. In tal caso O’Q’ diviene uguale a 2r, e perciò

$$O'Q'=2r \quad\to\quad 4r\operatorname{sen}\varphi=2r \quad\to\quad \operatorname{sen}\varphi=\frac{1}{2} \quad\to\quad \varphi=30°$$

Deve dunque essere

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\varphi\le 1$$

Ponendo

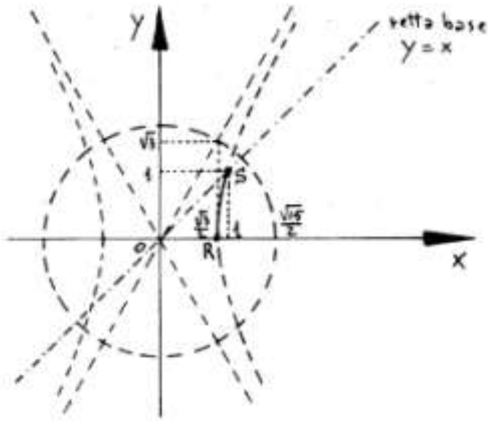
$$\begin{cases}\cos\varphi=x\\ \sqrt{\cos^2\varphi-3}=y \qquad (\text{con } y\ge 0)\end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases}y=x-\dfrac{a}{2r}\\ \dfrac{x^2}{3/4}-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = 1$ e l'arco RS di iperbole riferito agli assi, con semiassi

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$



La retta del fascio passa per $S \equiv (1;1)$ quando

$$0 = -\frac{a}{2r} \quad \rightarrow \quad a = 0$$

E passa per $R \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ quando

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2r} \quad \rightarrow \quad a = r\sqrt{3}$$

Quindi il sistema ammette una soluzione quando

$$\boxed{0 \le a \le r\sqrt{3}}$$

Luglio 1936 – Secondo problema

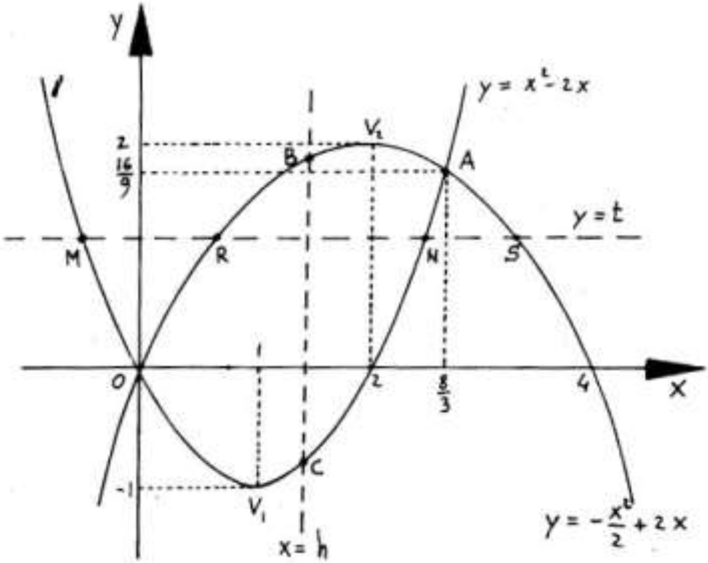
In uno stesso sistema di coordinate cartesiane ortogonali, due curve hanno per equazioni

$$y = x^2 - 2x \qquad\qquad y = 2x - \frac{x^2}{2}$$

Disegnare le due curve dopo aver trovato i loro punti di intersezione, i punti di incontro con l'asse x, i punti di massimo e di minimo.
Dire inoltre a quale distanza dall'asse x deve essere condotta una retta parallela a questo, affinché risultino uguali le corde su essa determinate dalle due parabole.
E' in facoltà del candidato, trovare:

a) **A quale distanza dall'asse y e internamente alla striscia determinata dalle perpendicolari all'asse x passanti per i punti d'incontro delle due curve, deve essere condotta una retta parallela all'asse y, affinché sia massimo il segmento di essa avente gli estremi sulle due parabole.**
b) **L'area della parte finita di piano limitata dalle due parabole.**

L'esercizio è molto simile a quello proposto nel secondo problema del settembre .
Per brevità (data la semplicità dei calcoli necessari) passiamo direttamente alla rappresentazione grafica delle due parabole, e indichiamo anche nel grafico le misure più indicative.



Consideriamo una generica retta orizzontale di equazione y = t e determiniamo la lunghezza dei segmenti MN e RS.

$$\begin{cases} y = t \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad \Rightarrow \; x^2 - 2x - t = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 1 \pm \sqrt{1+t}$$

$$MN = \left(1 + \sqrt{1+t}\right) - \left(1 - \sqrt{1+t}\right) = 2\sqrt{1+t}$$

$$\begin{cases} y = t \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases} \quad \Rightarrow \; -\frac{x^2}{2} + 2x - t = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 1 \pm \sqrt{4-2t}$$

$$RS = \left(2 + \sqrt{4-2t}\right) - \left(2 - \sqrt{4-2t}\right) = 2\sqrt{4-2t}$$

Le due corde sono uguali quando

$$MN = RS \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{1+t} = 2\sqrt{4-2t} \quad \rightarrow \quad t = 1$$

Consideriamo ora una generica retta verticale di equazione x = h e determiniamo le coordinate dei punti B e C.

$$\begin{cases} y = h \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = h^2 - 2h \quad (\text{ordinata di C})$$

$$\begin{cases} y = h \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{h^2}{2} + 2h \quad (\text{ordinata di B})$$

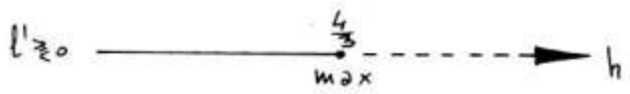
E perciò (indicando BC con ℓ)

$$\ell = \left(-\frac{h^2}{2} + 2h\right) - (h^2 - 2h) = -\frac{3}{2}h^2 + 4h$$

Derivando si ha

$$\ell' = -3h + 4$$

E, studiandone il segno



Dunque il massimo cercato si ha per h = 4/3.
Infine, l'area compresa fra le due parabole è

$$\int_0^{8/3} \left[\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) - (x^2 - 2x) \right] dx = \int_0^{8/3} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^{8/3} = \left[-\frac{x^3}{2} + 2x^2 \right]_0^{8/3} = \frac{128}{27}$$