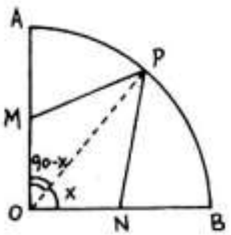
Settembre 1936 – Primo problema

Sopra l'arco AB quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 2r, determinare un punto P tale che, detti M ed N i due punti situati rispettivamente sui raggi OA e OB alla distanza r da O, il quadrilatero OMPN abbia area kr^2. Discussione.
E' facoltativa la risoluzione geometrica.



OA = OB = OP = 2r

OM = ON = r

Poniamo

$P\hat{O}B = x$

con $0 \leq x \leq 90$

L'area del quadrilatero OMPN può essere scomposta nella somma dell'area dei due triangoli ONP e OPM.
Si ha

$$S_{ONP} = \frac{2r \cdot r \cdot \text{sen}\, x}{2} = r^2 \text{sen}\, x$$

$$S_{OPM} = \frac{2r \cdot r \cdot \text{sen}(90 - x)}{2} = r^2 \cos x$$

E perciò

$$S_{OMPN} = kr^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 \text{sen}\, x + r^2 \cos x = kr^2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \text{sen}\, x + \cos x = k \\ & 0 < x < 90 \end{array}}$$

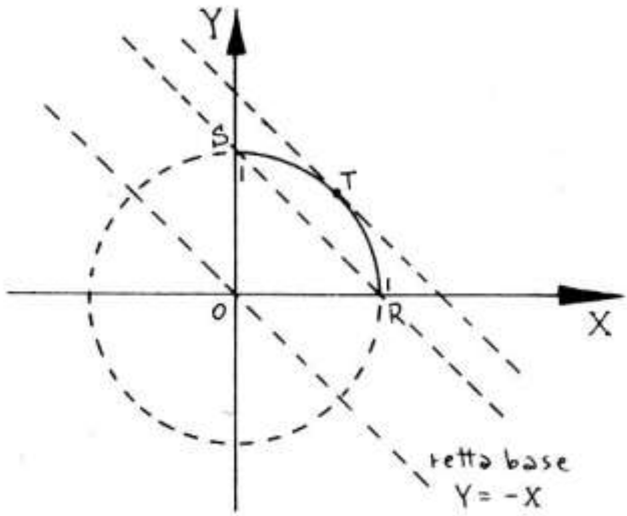
Ponendo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \text{sen}\, x = Y \end{cases}$$

E associando alla (1) la relazione fondamentale della trigonometria, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = -X + k \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = -1 e un quarto di circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario. Imponendo il passaggio del fascio per i punti R = (1;0) e S = (0;1) si ha in entrambi i casi k = 1.



Per la tangenza invece avremo

$$\begin{cases} Y = -X + k \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2X^2 - 2kX + k^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 2\left(k^2 - 1\right) = 0$$

$$k = \pm\sqrt{2}$$

E la tangenza in T corrisponde alla soluzione positiva perché k è anche il termine noto del fascio di rette e quindi è anche la intersezione della retta con l'asse Y.

Concludendo, si hanno sempre due soluzioni simmetriche per

$$\boxed{1 \le k \le \sqrt{2}}$$

Settembre 1936 – Secondo problema

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O, una curva ha equazione

$$y = x^2 - 6x + 8$$

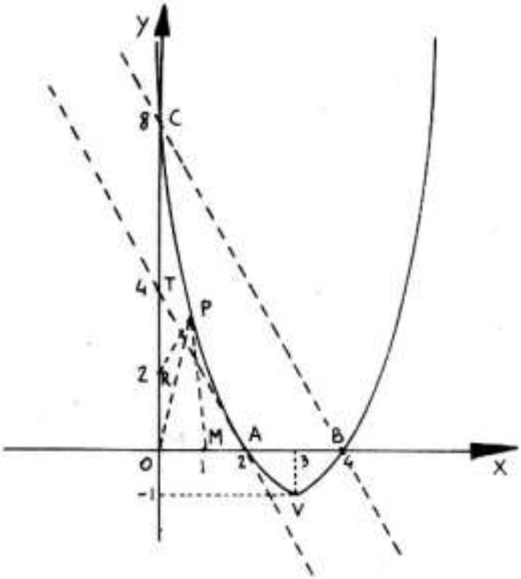
Disegnare la curva dopo averne trovato i punti A e B (con OA < OB) di intersezione con l'asse x, il punto C di intersezione con l'asse y, il punto di minimo, la tangente nel punto A e il punto di intersezione T di essa con l'asse y, facendo osservare nello stesso tempo che la tangente è parallela alla retta BC.
Determinare poi, mediante le coordinate, un punto P dell'arco AC della curva, in modo che sia k l'area del quadrangolo convesso che ha per vertici P, l'origine O, il punto medio M di OA e il punto medio R di OT.
Trovare quindi per quali valori di m la retta y = mx è secante o tangente alla parabola.

Saltiamo i calcoli facilissimi in quanto si tratta di una semplice parabola con vertice in

$$V \equiv (3;-1)$$

Concavità rivolta verso l'alto e intersezioni con gli assi in

$$A \equiv (2;0) \qquad B \equiv (4;0) \qquad C \equiv (0;8)$$



La derivata è

$$y' = 2x - 6$$

e poiché f'(2) = - 2 la retta tangente alla parabola ha equazione

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \to \quad y = -2x + 4$$

Ed è parallela alla retta BC avente anch'essa coefficiente angolare -2.
Un generico punto P che scorre sulla parabola ha coordinate

$$P \equiv \left(x; x^2 - 6x + 8\right) \qquad \text{con} \quad 0 \le x \le 2$$

L'area del quadrilatero OMPR può essere scomposta nella somma delle aree dei due triangoli OPM e OPR. Si ha

$$\begin{cases} S_{OPM} = \dfrac{(x^2 - 6x + 8) \cdot 1}{2} = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{2} \\ S_{OPR} = \dfrac{x \cdot 2}{2} = x \end{cases}$$

E perciò

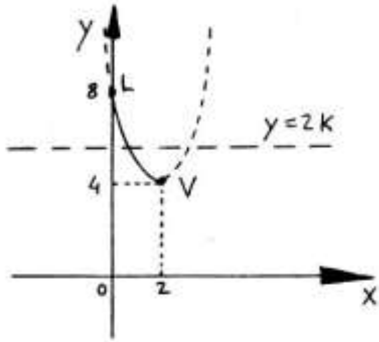
$$S_{OPM} + S_{OPR} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 6x + 8}{2} + x = k$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 - 4x + 8 - 2k = 0 \\ 0 \le x \le 2 \end{array}}$$

Ponendo $2k = y$ si ha il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8 \\ y = 2k \end{cases}$$

Cioè un arco di parabola LV con ascisse comprese fra 0 e -2, e un fascio di rette parallele orizzontali.



La retta del fascio passa per L quando k = 4 e passa per V quando k = 2. Si ha allora una soluzione per

$$\boxed{0 \le k \le 4}$$

Calcoliamo infine per quali valori di m la retta uscente dall'origine è secante o tangente alla parabola

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \ x^2 - x(6+m) + 8 = 0$$

$$\Delta = (6+m)^2 - 32 \ge 0$$

$$m^2 + 12m + 4 \ge 0$$

M si annulla per

$$m = -6 \pm 4\sqrt{2}$$

E quindi