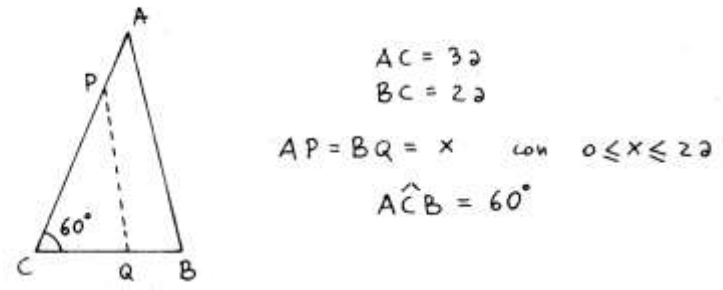
# Luglio 1937 – Primo problema

**Del triangolo ACB si sa che le misure dei lati AC e CB sono rispettivamente 3a e 2a, e che l'angolo ACB misura 60°.**
**Determinare sul lato AC un punto P e sul lato BC un punto Q, tali che AP = BQ e che la somma dei quadrati costruiti sui quattro segmenti AB, BQ, PQ, PA sia equivalente al quadrato il cui lato misura $\ell$. Si ponga AP = x.**




Con il teorema di Carnot si trova

$$AB^2 = 9a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2a \cdot \cos 60° =$$
$$= 9a^2 + 4a^2 - 6a^2 = 7a^2$$
$$PQ^2 = (3a - x)^2 + (2a - x)^2 - 2(3a - x)(2a - x)\cos 60° =$$
$$= x^2 - 5ax^2 + 7a^2$$

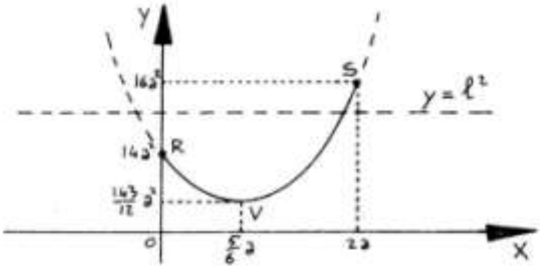
Quindi, applicando la relazione del problema, si ha

$$7a^2 + x^2 + x^2 - 5ax^2 + 7a^2 + x^2 = \ell^2$$
$$\boxed{\begin{array}{c} 3x^2 - 5ax^2 + 14a^2 - \ell^2 = 0 \\ 0 \le x \le 2a \end{array}}$$

Ponendo $\ell^2 = y$ si ha il sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 5ax^2 + 14a^2 \\ y = \ell^2 \end{cases}$$

Cioè un arco di parabola con ascisse comprese fra 0 e 2a, ed un fascio di rette orizzontali.



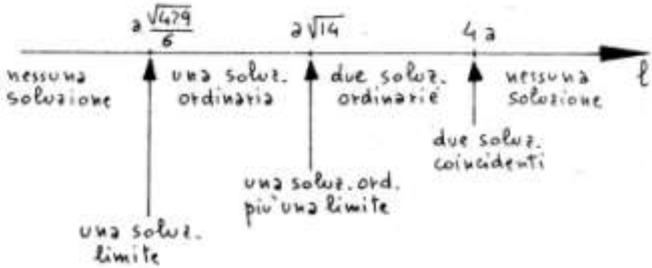

La retta del fascio passa per

$$S \equiv \left(2a;16a^2\right) \quad \text{quando} \quad \ell^2 = 16a^2 \quad \rightarrow \quad \ell = 4a$$

$$R \equiv \left(0;14a^2\right) \quad \text{quando} \quad \ell^2 = 14a^2 \quad \rightarrow \quad \ell = a\sqrt{14}$$

$$V \equiv \left(\frac{5}{6};\frac{143}{12}a^2\right) \quad \text{quando} \quad \ell^2 = \frac{143}{12}a^2 \quad \rightarrow \quad \ell = \frac{\sqrt{429}}{6}a$$

E perciò avremo



# Luglio 1937 – Secondo problema

**Data l'equazione in x**

$$x^2 - 2(k - 1)x + 4 = 0$$

**Dire per quali valori positivi del parametro k una o entrambe le radici sono reali positive e non superiori a 4.**
**Ritrovare poi i risultati della discussione, servendosi della rappresentazione grafica della funzione**

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$$

**Che si ottiene mutando k in y nell'equazione data e risolvendo l'equazione rispetto ad y, anziché rispetto ad x.**

Il discriminante dell'equazione

$$x^2 - 2(k - 1)x + 4 = 0$$

è

$$\frac{\Delta}{4} = \left(k-1\right)^2 - 4$$

Quindi le due soluzioni sono reali quando

$$k^2 - 2k + 1 - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k^2 - 2k - 3 \geq 0$$

Cioè


Ma il testo impone che k debba essere positivo e perciò l'equazione data avrà soluzioni reali per $k \geq 3$.
Per valori di $k \geq 3$ essa presenta due variazioni e quindi due soluzioni entrambe sempre positive. Esse sono fornite dalla formula

$$x = \left(k-1\right) \pm \sqrt{k^2 - 2k - 3}$$

La maggiore delle due non deve essere maggiore di 4, e perciò poniamo

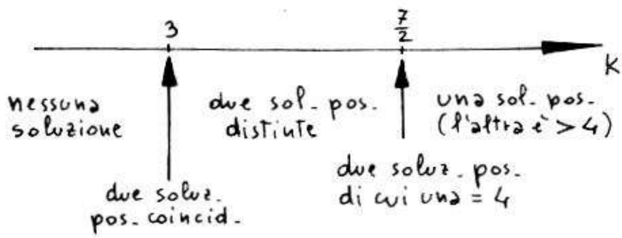
$$(k-1)+\sqrt{k^2-2k-3}=4$$

$$\sqrt{k^2-2k-3}=5-k$$

$$k^2-2k-3=25-10k+k^2$$

$$k=\frac{7}{2}$$

Quando k supera tale valore, la più grande delle soluzioni diviene maggiore di 4, mentre l'altra pur restando positiva è sempre minore. Si ha così la situazione seguente




Queste conclusioni risulteranno più convincenti ritrovandole per via grafica.
Ponendo $k = y$ nell'equazione iniziale si ottiene la conica

$$\boxed{(1) \qquad x^2-2xy+2x+4=0}$$

Che ora cercheremo di tracciare dopo aver ricordato alcuni concetti importanti riguardanti le coniche in forma generica.

L'equazione di una conica in forma generica è un polinomio (uguagliato a zero, di secondo grado nelle due incognite x ed y.
Cioè

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Il genere di conica è determinato dal valore del discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \left| \begin{array}{ll} > 0 & \text{è una iperbole} \\ = 0 & \text{è una parabola} \\ < 0 & \text{è una ellisse (o circonferenza)} \end{array} \right.$$

Il centro della conica (eccetto la parabola), ha coordinate

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2dc - be}{\Delta} \\ y_0 = \dfrac{2ae - bd}{\Delta} \end{cases}$$

Se la conica è una iperbole, i coefficienti angolari degli asintoti coincidono con i coefficienti angolari delle rette che si ottengono uguagliando a zero i termini di secondo grado dell'equazione della conica.

Nel nostro caso, per la (1) si ha

$$\Delta = 4 > 0 \quad \text{quindi la conica è una iperbole}$$

Il centro della conica ha coordinate

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

E uguagliando a zero i termini di secondo grado della (1) si ha

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x(x - 2y) = 0$$

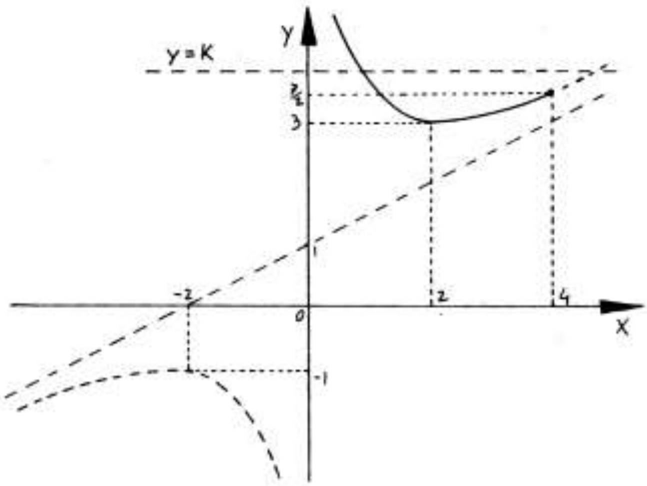
Che (per la legge di annullamento del prodotto) possono essere scisse nelle equazioni di due rette

$$\begin{cases} x = 0 & \text{retta coincidente con l'asse y } (m = \infty) \\ y = \dfrac{1}{2}x & \text{retta passante per O e con } m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi i due asintoti hanno equazione

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

Risulta dunque il grafico seguente




Le soluzioni sono date dalle ascisse delle intersezioni fra l'iperbole e la generica retta orizzontale di equazione $y = k$.
Dunque (concordemente a quanto trovato in precedenza)

$3 \le k \le 7/2$ due soluzioni positive

$k > 7/2$ una sola soluzione