Settembre 1937 – Primo problema

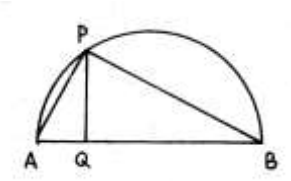
Sopra una semicirconferenza di diametro AB = 2r, determinare n punto P tale che detta Q la proiezione di esso su AB, si abbia

$$\mathbf{AQ + QP = a}$$

Essendo a la misura di un dato segmento. Discussione.
Esaminare i casi particolari in cui

$$a = r \qquad a = r\frac{3+\sqrt{3}}{2} \qquad a = r\left(1+\sqrt{2}\right)$$

E' in facoltà del candidato di risolvere e discutere il problema anche per via geometrica.



AB = 2r
Poniamo AQ = x (con $0 < x < 2r$) e PQ = y (con $0 < y < r$)
Applicando la relazione del problema, si ha

$$x + y = a$$

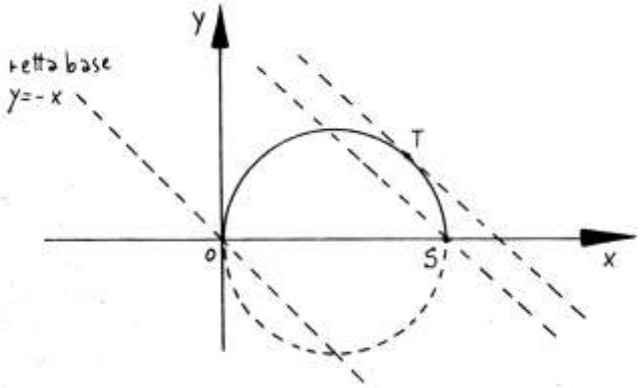
ma avendo introdotto due incognite occorre una seconda relazione da affiancare alla precedente. Applichiamo allora il secondo teorema di Euclide al triangolo APB

$$PQ^2 = AQ \cdot QB \quad \rightarrow \quad y^2 = x\left(2r - x\right)$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 - 2rx = 0 \end{cases}$$

Costituito da un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = -1 e una circonferenza con centro in $C \equiv (r;0)$ e raggio r.



La retta del fascio passa per $O \equiv (0;0)$ quando a = 0 e passa per $S \equiv (2r;0)$ quando a = 2r.

Si ha invece la tangenza per

$$\begin{cases} y = a - r \\ x^2 + y^2 - 2rx = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + (a-x)^2 - 2rx = 0$$

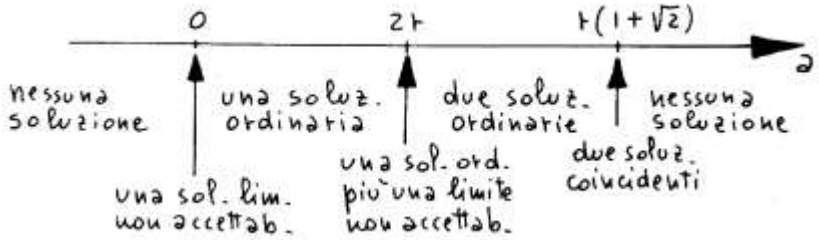
$$2x^2 - 2x(a+r) + a^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (a+r)^2 - 2a^2 = 0$$

$$a = r(1 \pm \sqrt{2})$$

Dei due valori si deve prendere in considerazione solo quello corrispondente al segno positivo perché la retta tangente in T taglia l'asse y in un punto positivo, e quindi il termine noto della retta deve essere positivo.

Quindi avremo



Circa i casi particolari lasciamo al lettore i calcoli ma, come si vede dalla figura precedente, per a = r si otterrà una sola soluzione

accettabile, per $a = r\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ce ne saranno due, ed infine per $a = r\left(1+\sqrt{2}\right)$ ce ne saranno due coincidenti.

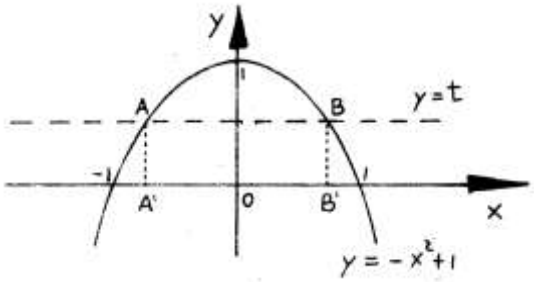
Settembre 1937 – Secondo problema

Dopo aver disegnato nel piano cartesiano la curva rappresentatrice della funzione

$$y = 1 - x^2$$

dall'asse x, una corda AB parallela a quest'asse in modo che sia 2p la misura del perimetro del rettangolo avente per vertici A, B e le proiezioni A', B' di questi punti sull'asse x.
Discussione. Calcolare i valori di p per i quali il rettangolo risulta quadrato o con due lati consecutivi uno la metà dell'altro.

La curva è una parabola con vertice in $V \equiv (0;1)$ e concavità verso il basso. Tracciamo una retta generica orizzontale di equazione $y = t$ (con $0 < t < 1$ affinché ci siano intersezioni reali sopra l'asse x).



Poiché

$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - t \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1-t}$$

Le coordinate dei vertici del rettangolo sono

$$A \equiv \left(-\sqrt{1-t}; t\right) \qquad A' \equiv \left(-\sqrt{1-t}; 0\right)$$

$$B \equiv \left(\sqrt{1-t}; t\right) \qquad B' \equiv \left(\sqrt{1-t}; 0\right)$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$AB + BB' = p \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{1-t} + t = p \quad (\text{con } 0 < t < 1)$$

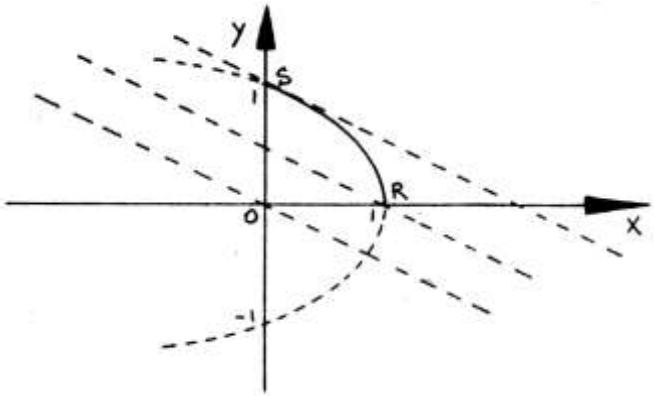
Ponendo

$$\begin{cases} t = x \\ \sqrt{1-t} = y \end{cases} \quad (\text{con } y \geq 0)$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{p}{2} \\ x = -y^2 + 1 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\frac{1}{2}$ e l'arco RS di parabola



Imponendo il passaggio del fascio per $R \equiv (1;0)$ si ottiene p = 1, mentre imponendo il passaggio per $S \equiv (0;1)$ si ottiene p = 2.

Imponendo infine la tangenza si trova

$$\begin{cases} x = p - 2y \\ 1 - x = y^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 - p + 2y = y^2$$

$$y^2 - 2y + p - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = 1 - (p-1) = 0 \quad \rightarrow \quad p = 2$$

Cioè la retta del fascio è tangente alla parabola proprio nel punto S.

Si ha quindi una soluzione per

$$1 < p < 2$$

Esaminiamo infine i casi particolari. Il rettangolo ABB'A' diviene un quadrato quando

$$AB = BB' \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{1-t} = t \quad \rightarrow \quad t^2 + 4t - 4 = 0$$

$$t = -2 \pm 2\sqrt{2} = 2\left(\pm\sqrt{2} - 1\right)$$

E la soluzione negativa va scartata perché la somma di due triangoli non può essere negativa. Dunque $t = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Il perimetro del quadrato è allora

$$8\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2p \quad \rightarrow \quad p = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Con lo stesso procedimento si ricava

$$AB = 2 \cdot BB' \quad \rightarrow \quad p = 3\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{o anche}$$

$$2 \cdot AB = BB' \quad \rightarrow \quad p = 6\left(\sqrt{5} - 2\right)$$