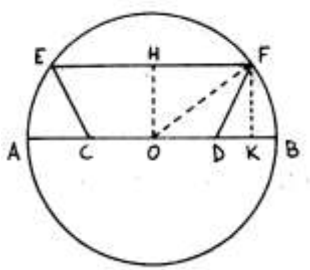
Luglio 1938 – Primo problema

Sopra il diametro AB di un cerchio di centro O e raggio r sono dati due punti C e D rispettivamente medi di OA e OB.
Determinare la lunghezza 2x di una corda del cerchio, parallela ad AB, in modo che detto m un numero dato reale e positivo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui quattro lati del trapezio convesso CEFD risulti

$$\frac{(m+2)r^2}{2}$$

Discussione.



$$AO = OB = r$$
$$AC = CO$$
$$OD = DB$$

Poniamo EH = HF = x (con $0 \leq x < r$)

Limitiamoci a considerare solo la semicirconferenza superiore. E' intanto

$$EF = 2x \qquad CB = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Inoltre si ha

$$FK = OK = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad DK = \left| x - \frac{r}{2} \right|$$

E, applicando il teorema di Pitagora al triangolo FKD

$$FD^2 = FK^2 + KD^2 = r^2 - x^2 + x^2 - rx + \frac{r^2}{4} = \frac{5}{4}r^2 - rx$$

Infine, con la condizione imposta dal testo, si ha

$$EF^2 + CD^2 + 2 \cdot FD^2 = \frac{(m+2)r^2}{2}$$

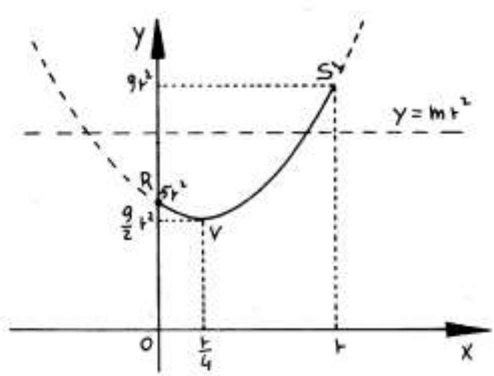
$$4x^2 + r^2 + 2\left(\frac{5}{4}r^2 - rx\right) = \frac{(m+2)r^2}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 8x^2 - 4rx + 5r^2 - mr^2 = 0 \\ 0 \le x < r \end{matrix}}$$

Ponendo $mr^2 = y$ si ha il sistema

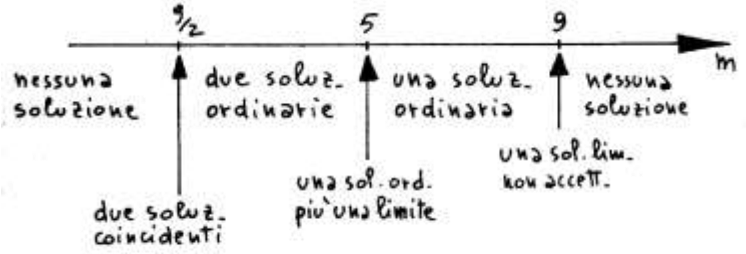
$$\begin{cases} y = 8x^2 - 4rx + 5r^2 \\ y = mr^2 \end{cases}$$

Cioè una parabola e un fascio di rette orizzontali.



La retta del fascio passa per $V \equiv \left(\frac{r}{4}; \frac{9}{2}r^2\right)$ quando m = 9/2, passa per $R \equiv (0; 5r^2)$ quando m = 5, e passa per $S \equiv (r; 9r^2)$ quando m = 9.

Si ha quindi la situazione seguente


9/2
5
9
m
nessuna soluzione
due soluz. ordinarie
una soluz. ordinaria
nessuna soluzione
due soluz. coincidenti
una sol. ord. più una limite
una sol. lim. non accett.

Luglio 1938 – Secondo problema

Assi cartesiani ortogonali una parabola del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

interseca l'asse x nell'origine e nel punto A di ascissa 4. Determinare a, b, c sapendo che la tangente alla parabola nell'origine è inclinata rispetto alla direzione positiva dell'asse x, di 45°.
Fra tutti i trapezi aventi come base maggiore il segmento OA e per base minore una delle corde della parabola parallele ad OA, determinare quello di area massima.
In che rapporto l'area di tale trapezio sta a quella del segmento parabolico determinato da OA e contenente il trapezio ?

Imponiamo alla parabola generica il passaggio per O = (0;0) ed A = (0;4)

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \end{cases}$$

E l'equazione generica si riduce a

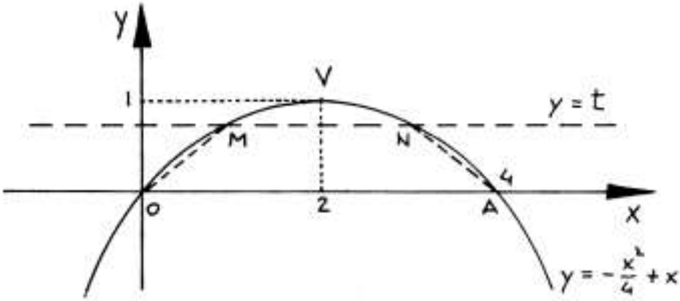
$$y = ax^2 - 4ax$$

Imponiamo anche che la tangente in A abbia coefficiente angolare uguale ad uno.

$$y' = 2ax - 4a \quad \rightarrow \quad f'(0) = -4a = 1 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

La parabola richiesta ha quindi equazione

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x^2 + x}$$



Consideriamo ora una generica retta orizzontale di equazione

$$y = t \quad \text{con} \quad 0 < t \le 1$$

E calcoliamo le coordinate di M ed N.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} + x \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = -\dfrac{x^2}{4} + x$$

$$4t = -x^2 + 4x$$

$$x^2 - 4x + 4t = 0$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{1-t}$$

E perciò

$$\begin{cases} M \equiv \left(2 - 2\sqrt{1-t}; t\right) \\ N \equiv \left(2 + 2\sqrt{1-t}; t\right) \end{cases}$$

$$MN = \left(2 + 2\sqrt{1-t}\right) - \left(2 - 2\sqrt{1-t}\right) = 4 - \sqrt{1-t}$$

Risulta quindi

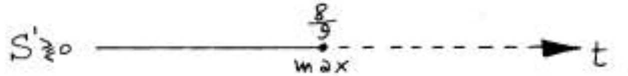
$$S_{trapezio} = \frac{\left(4 + 4\sqrt{1-t}\right) \cdot t}{2} \qquad \rightarrow \qquad S = 2t + 2t\sqrt{1-t}$$

Dobbiamo trovare il massimo di questa funzione. Derivando si ha

$$S' = \frac{2\sqrt{1-t} - 3t + 2}{\sqrt{1-t}}$$

Possiamo limitarci a studiare il segno del solo numeratore, in quanto il denominatore è sempre positivo. Abbiamo

$$2\sqrt{1-t} \geq 3t-2 \qquad \text{(disequazione irrazionale)}$$



In corrispondenza di t = 8/3 si ha l'area massima cercata

$$S = 2 \cdot \frac{8}{9} + 2\frac{8}{9}\sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{54}{27}$$

Calcoliamo anche l'area del segmento parabolico OVA

$$S = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x \right) dx = \left[-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

Si noti che lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere senza integrali, ricordando un noto teorema geometrico, in base al quale l'area di un segmento parabolico è sempre uguale ai 4/3 dell'area del triangolo OVA. Si ha infatti

$$S = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 1}{2} = \frac{8}{3}$$

Per concludere, il rapporto fra l'area del trapezio massimo e l'area del segmento parabolico, è

$$R = \frac{\frac{64}{27}}{\frac{8}{3}} = \frac{64}{27} \cdot \frac{3}{8} = \frac{8}{9}$$