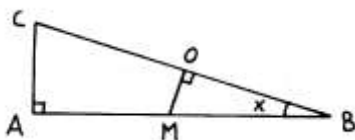


Settembre 1938 – Primo problema

Nel triangolo rettangolo BAC, l'ipotenusa BC è lunga 2^0 e il cateto CA è minore o uguale al cateto BA.

Detti O il punto medio di BC ed M il punto in cui la perpendicolare in O a BC incontra la retta AB, determinare l'ampiezza x dell'angolo CBA, sapendo che l'area del rettangolo di lati CA e OM è uguale a $2ma^2$ essendo m un numero dato.

Discussione e calcolo dei valori di m per cui l'angolo CBA risulta rispettivamente di 30° , 45° , 60° .



Si ricava immediatamente

$$\frac{OM}{OB} = \operatorname{tg} x \quad \rightarrow \quad OM = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{AC}{BC} = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad AC = 2a \operatorname{sen} x$$

Applicando la relazione del problema si ottiene

$$2a \operatorname{sen} x \cdot a \operatorname{tg} x = 2ma^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = m$$

$$(1) \quad \cos^2 x + m \cos x - 1 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < 1$$

Ponendo

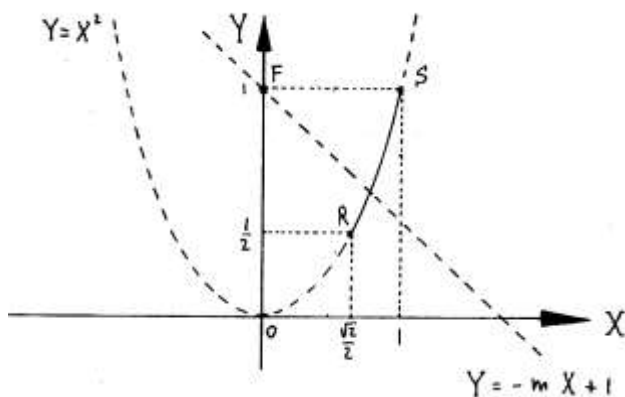
$$\begin{cases} \cos x = X \\ \cos^2 x = Y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = mX + 1 \\ Y = X^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro $F \equiv (0;1)$, come si può ricavare attribuendo ad m due valori arbitrari (per esempio $m = 1$ e $m = 2$) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute, e l'arco RS di parabola.

La retta del fascio passa per $R \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ quando $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e passa per il punto $S \equiv (1;1)$ quando $m = 0$.



Si ha quindi una soluzione per

$$0 < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Riguardo l'ultima richiesta, sostituendo nella (1) i coseni degli angoli caratteristici, si trova

$$x = 30^\circ \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x = 36^\circ \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \rightarrow \quad m = \frac{3\sqrt{5} - 5}{4}$$

$$x = 45^\circ \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Settembre 1938 – Secondo problema

In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola

$$y^2 = x + 1$$

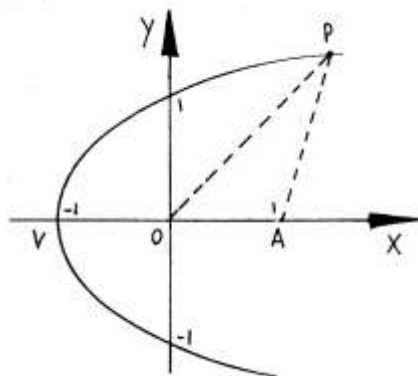
disegnare la curva e determinare i punti P di essa per cui, detta O l'origine delle coordinate, ed A il punto dell'asse x di ascissa 1, si abbia

$$PO^2 = m \cdot PA^2$$

Essendo m un numero dato. Discussione.

In forma normale la equazione diviene

$$x = y^2 - 1 \quad \text{con vertice } V \equiv (-1; 0)$$



Un generico punto P che scorre sulla parabola ha coordinate

$$P \equiv (y^2 - 1; y)$$

Applicando la formula della distanza fra due punti, si trova immediatamente

$$PO^2 = (y^2 - 1)^2 + y^2 = y^4 - y^2 + 1$$

$$PA^2 = (y^2 - 1 - 1)^2 + y^2 = y^4 - 3y^2 + 4$$

E quindi, applicando la relazione fornita dal testo

$$y^4 - y^2 + 1 = m(y^4 - 3y^2 + 4)$$

$$(1) \quad y^4(1-m) + y^2(3m-1) + 1 - 4m = 0$$

Senza alcuna limitazione per la y . Ponendo

$$\begin{cases} y^2 = X \\ y^4 = Y \end{cases}$$

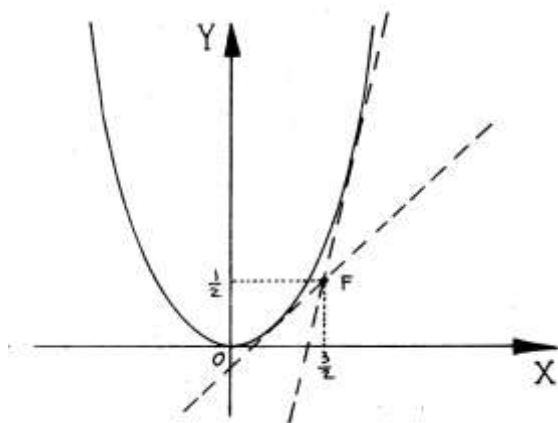
Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = X^2 \\ Y = \frac{3m-1}{m-1}X + \frac{1-4m}{m-1} \end{cases}$$

Cioè una parabola e un fascio di rette con centro nel punto

$$F \equiv \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Ricavato assegnando, come al solito, due valori arbitrari ad m (per esempio $m = \frac{1}{3}$ e $m = \frac{1}{4}$) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute.



Si hanno sempre due intersezioni, per

$$\Delta = (3m-1)^2 - 4(1-m)(1-4m) \geq 0$$

Cioè

$$\frac{7-2\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{7+2\sqrt{7}}{2}$$

Ed essendo la (1) una equazione biquadratica, in tale intervallo si hanno sempre quattro soluzioni.

Solo nel caso in cui $m = 1$ (la retta del fascio è verticale) si ha una intersezione e quindi due soluzioni.