# Luglio 1939 – Primo problema

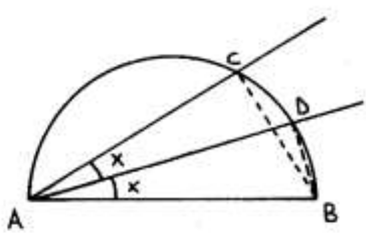
**Nel semicerchio di diametro AB = 2r condurre una corda AC tale che, se AD è la corda che biseca l'angolo** $BAC$**, risulti**

**AC + AD = 2mr**

**Con m reale e positivo. Discussione.**

**Si prenda come incognita l'ampiezza 2x dell'angolo** $BAC$ **. Analizzare il caso particolare**

$$m = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$




Poniamo $\quad BAC = 2x \qquad$ con $\quad 0 \le x \le 45°$

Si ottiene immediatamente

$$\frac{AC}{AB} = \cos 2x \qquad \rightarrow \qquad AC = 2r\cos 2x = 2r\left(2\cos^2 x - 1\right)$$

$$\frac{AD}{AB} = \cos x \qquad \rightarrow \qquad AD = 2r\cos x$$

Imponendo la condizione del problema, si ha

$$2r\left(2\cos^2 x - 1\right) + 2r\cos x = 2mr$$

Cioè

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & 2\cos^2 x + \cos x - 1 - m = 0 \\ & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x \le 1 \end{array}}$$

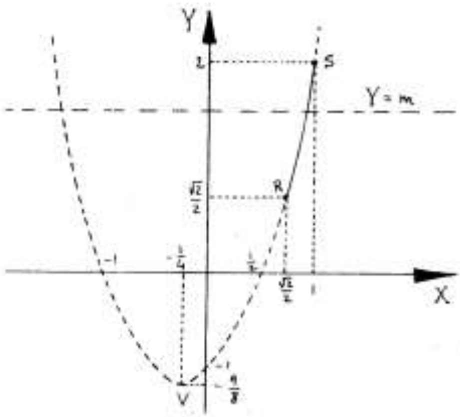
Poniamo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ m = Y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = 2X^2 + X - 1 \\ Y = m \end{cases}$$

Cioè una parabola con vertice $V \equiv \left( -\frac{1}{4}; -\frac{9}{8} \right)$ e concavità verso l'alto, di cui dovremo considerare solo l'arco RS, con $R \equiv \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ $S \equiv (1; 2)$ e un fascio di rette orizzontali.




La retta del fascio passa per R quando $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e passa per S quando m = 2.

Infine, ponendo $m = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ nella (1), si ottiene

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 3 - \sqrt{3} = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{-1 \pm \left(2\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

Cioè

$$\begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & \text{(soluzione impossibile)} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \rightarrow \quad x = 30° \end{cases}$$

In quest'ultimo caso si ha

$$AD = r\sqrt{3} \quad \text{e} \quad AC = r$$

# Luglio 1939 – Secondo problema

**In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola**

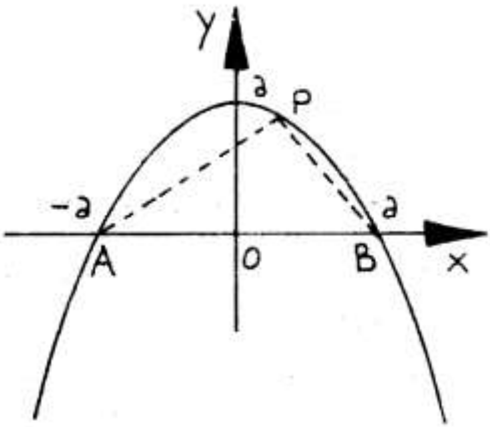
$$y = a - \frac{x^2}{a}$$

**Detti A e B i punti di intersezione di essa con l'asse x, determinare sull'arco parabolico AB un punto P tale che**

$$AP^2 + BP^2 = 2k^2$$

**Discussione.**

Disegniamo la parabola $y = a - \frac{x^2}{a}$ considerando a > 0 (infatti se a < 0 avremo una situazione perfettamente simmetrica, ruotata di 180° rispetto all'asse x, completamente equivalente alla ipotesi da noi prescelta).




Un generico punto P che scorre sulla parabola ha coordinate

$$P \equiv \left( x; a - \frac{x^2}{a} \right)$$

E, affinché esso sia contenuto nell'arco AB, deve essere

$$0 \le x \le a$$

Applicando la formula della distanza fra due punti, si ha

$$AP^2 = (x+a)^2 + \left(a - \frac{x^2}{a}\right)^2 = \frac{x^4 - a^2x^2 + 2a^3x + 2a^4}{a^2}$$

$$PB^2 = (x-a)^2 + \left(a - \frac{x^2}{a}\right)^2 = \frac{x^4 - a^2x^2 - 2a^3x + 2a^4}{a^2}$$

E quindi, imponendo la condizione del testo

$$\frac{x^4 - a^2x^2 + 2a^3x + 2a^4}{a^2} + \frac{x^4 - a^2x^2 - 2a^3x + 2a^4}{a^2} = 2k$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & x^4 - a^2x^2 + 2a^4 - a^2k^2 = 0 \\ & 0 \le x^2 \le a^2 \end{array}}$$

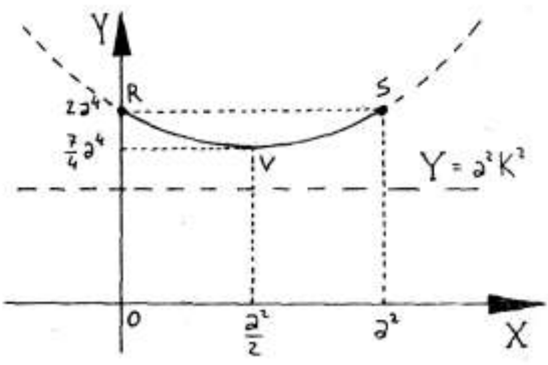
Ponendo

$$\begin{cases} x^2 = X \\ a^2k^2 = Y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = X^2 - a^2X + 2a^4 \\ Y = a^2k^2 \end{cases}$$

Cioè una parabola di cui ci interessa solo l’arco utile RS che soddisfa le limitazioni imposte, ed un fascio di rette orizzontali.




La retta del fascio passa per R ed S quando $k^2 = 2a^2$ e passa per V quando $k^2 = \frac{7}{4}a^2$.

Ci sono allora due intersezioni quando

$$\frac{7}{4}a^2 \le k^2 \le 2a^2$$

E, dato che la (1) è biquadratica, in tale intervallo ci sono sempre quattro soluzioni.