

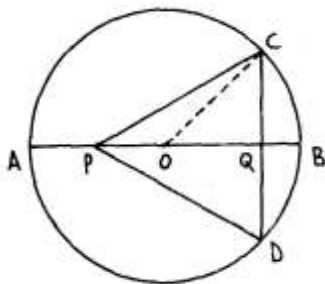
Settembre 1939 – Primo problema

Sul diametro AB di un cerchio di centro O e raggio r è dato il punto P medio del raggio OA .

Determinare sul raggio OB un punto Q tale che, condotta per esso la corda CD perpendicolare ad AB , la somma dei quadrati dei lati del triangolo PCD sia

$$2\left(m + \frac{1}{4}\right)r^2$$

Essendo m un numero reale positivo. Discussione.



Poniamo

$$PQ = x \quad \text{con} \quad \frac{r}{2} < x < \frac{3}{2}r$$

$$CQ = y \quad \text{con} \quad 0 < y \leq r$$

Si ha

$$PC^2 = x^2 + y^2 \qquad CD^2 = 4y^2$$

E, applicando la relazione del problema,

$$2(x^2 + y^2) + 4y^2 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)r^2$$

(1) $x^2 + 3y^2 - \left(m + \frac{1}{4}\right)r^2 = 0$
--

Ma, avendo usato due incognite dobbiamo abbinare alla (1) una seconda relazione, per esempio il teorema di Pitagora applicato al triangolo OCQ. Essendo

$$OQ = x - \frac{r}{2}$$

Si ha

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = r^2$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - rx - \frac{3}{4}r^2 = 0$$

La discussione grafica risulterebbe laboriosa perché la (1) è una famiglia di ellissi, mentre la (2) è una circonferenza.

Convienne allora ricavare y^2 dalla (2) e sostituire nella (1) la relazione così ottenuta. Eseguendo i calcoli e semplificando si ottiene

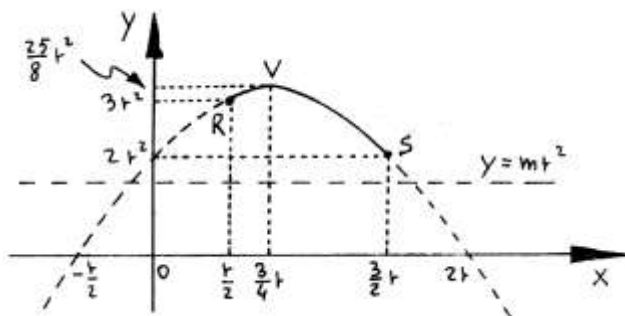
$$2x^2 - 3rx - 2r^2 + mr^2 = 0$$

$$\frac{r}{2} < x < \frac{3}{2}r$$

In cui ponendo $mr^2 = y$ si ha il sistema

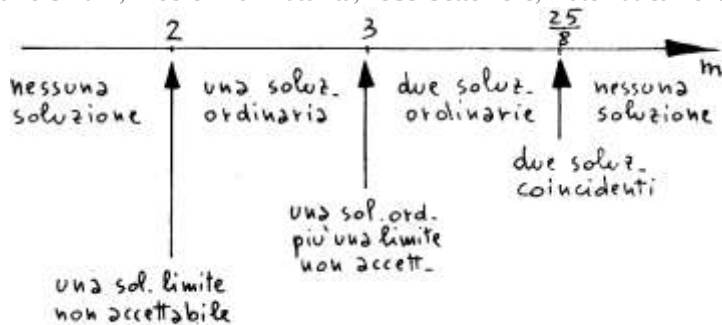
$$\begin{cases} y = -2x^2 + 3rx + 2r^2 \\ y = mr^2 \end{cases}$$

Cioè una parabola con asse verticale e concavità verso il basso, di cui ci interessa solo l'arco utile RS, ed un fascio di rette parallele.



La retta del fascio passa per S quando $m = 2$, passa per R quando $m = 3$ e passa per V quando $m = 25/8$.

La situazione finale è allora la seguente



Settembre 1939 – Secondo problema

In un sistema di assi cartesiani ortogonali rappresentare le curve di equazione

$$y = n(mx^2 + 3x) \qquad y = \frac{2n}{x}$$

sapendo che m ed n sono tali che uno dei punti di intersezione delle due curve è il punto $(1;6)$.

Determinare inoltre le coordinate degli altri punti di intersezione delle due curve.

E' facoltà del candidato di trovare anche il massimo dei rettangoli aventi due vertici sull'asse delle ascisse e gli altri due sull'arco della suddetta parabola, determinato da questo asse stesso.

La prima curva è una parabola con asse verticale, mentre la seconda è una iperbole equilatera riferita agli asintoti.

Poiché l'iperbole ha un solo parametro, lo possiamo determinare imponendo ad essa il passaggio per il punto $A \equiv (1;6)$. Si ha

$$6 = \frac{2n}{1} \quad \rightarrow \quad n = 3$$

E quindi l'iperbole ha equazione

$$(1) \quad y = \frac{6}{x}$$

Stabilito che $n = 3$, anche la parabola ha ora un solo parametro incognito

$$y = 3(mx^2 + 3x)$$

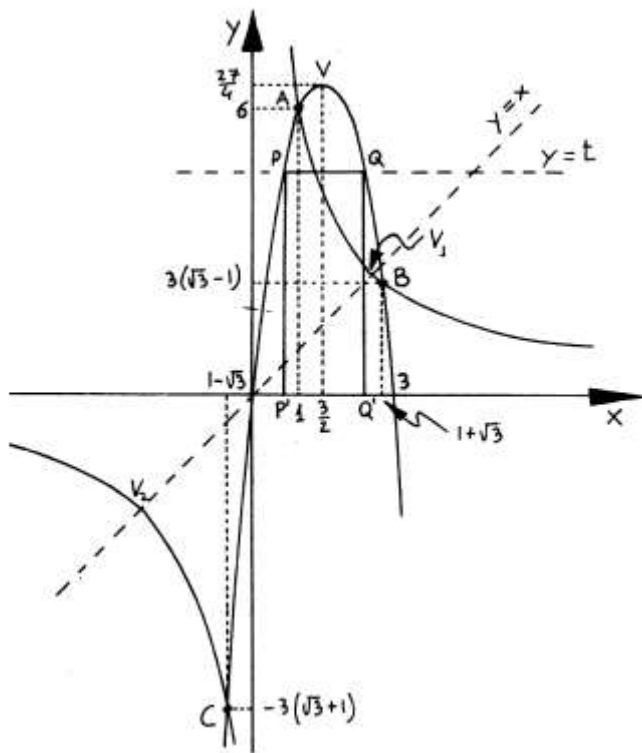
Imponiamo anche a questa il passaggio per A . Si ha

$$6 = 3(m+3) \quad \rightarrow \quad m = -1$$

E la parabola ha equazione

$$(2) \quad y = -3x^2 + 9x$$

Riportiamo le due curve su uno stesso grafico



La parabola ha vertice in $V \equiv \left(\frac{3}{2}; \frac{27}{4}\right)$ e taglia l'asse x nell'origine e nel punto di ascissa 3.

L'iperbole occupa il primo e terzo quadrante degli assi coordinati, ed ha vertici nei punti

$$V_1 \equiv (\sqrt{6}; \sqrt{6}) \quad \text{e} \quad V_2 \equiv (-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$$

Come si può ricavare risolvendo il sistema formato dall'iperbole e dalla bisettrice $y = x$.

Le coordinate dei punti B e C si trovano risolvendo il sistema costituito dalla parabola e dall'iperbole.

Uguagliando i secondi membri delle (1) e (2) si ottiene

$$\frac{6}{x} = -3x^2 + 9x \quad \rightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

E, scomponendo in fattori,

$$(x-1)(x^2-2x-2)=0$$

Da cui si ricavano le coordinate

$$\begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = 1 + \sqrt{3} \\ y_B = 3(\sqrt{3} - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = 1 - \sqrt{3} \\ y_C = -3(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

Prendiamo ora in considerazione una generica retta orizzontale di equazione $y = t$. Resta determinato il rettangolo PQQ'P'.

Le ascisse di P e Q sono

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 9x \\ y = t \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 9x + t = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 12t}}{6}$$

Ed è perciò

$$PQ = \frac{9 + \sqrt{81 - 12t}}{6} - \frac{9 - \sqrt{81 - 12t}}{6} = \frac{\sqrt{81 - 12t}}{3}$$

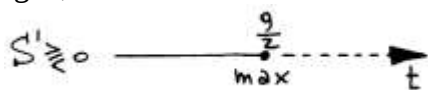
Ma l'altezza del rettangolo è t , e allora la sua area è

$$S = \frac{t\sqrt{81 - 12t}}{3}$$

Derivando si ha

$$S' = \frac{\sqrt{81 - 12t}}{3} + \frac{t}{3} \frac{-12}{2\sqrt{81 - 12t}} \rightarrow S' = \frac{27 - 6t}{\sqrt{81 - 12t}}$$

E, studiandone il segno,



Si ha dunque il massimo cercato per $t = 9/2$ e, per tale valore l'area è

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$