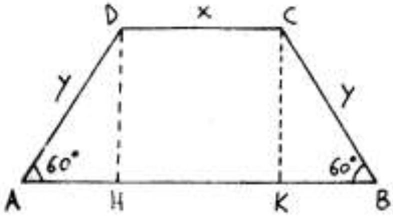
Luglio 1940 – Problema unico

Di un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore sono ampi 60°, il perimetro è 2p, l'area è $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ **.**

Determinare le misure dei lati del trapezio assumendo come incognite le misure della base minore e di uno dei lati non paralleli.



Poniamo

$$DC = x \quad \text{con } x > 0$$

$$BC = y \quad \text{con } y > 0$$

I triangoli ADH e BKC sono metà triangoli equilateri e quindi

$$AH = KB = \frac{y}{2}$$

Risulta allora

$$AB = \frac{y}{2} + x + \frac{y}{2} = x + y$$

E il perimetro del trapezio è

$$\boxed{(1) \qquad 2x + 3y = 2p}$$

Esplicitando la y si può scrivere

$$y = \frac{2}{3}p - \frac{2}{3}x$$

Da cui si può vedere che la y non può assumere qualsiasi valore positivo. Infatti la y assume valore massimo quando x = 0 ed in tal caso si ha $y = \frac{2}{3}p$.

Quindi è in definitiva

$$\boxed{(2) \qquad 0 < y < \frac{2}{3}p}$$

Determiniamo ora l'area del trapezio. Essendo

$$CK = \sqrt{y^2 - \frac{y^2}{4}} = \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

Si ha

$$\frac{(AB + BC) \cdot CK}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{(3) \qquad 2xy + y^2 = a^2}$$

Le equazioni (1) e (3) corrispondono nel piano cartesiano ad una retta e una famiglia di iperboli (stabiliamo infatti di considerare come parametro variabile la lettera a).

La discussione grafica non è molto agevole, conviene ricavare la x dalla (1) e sostituirla nella (3). Eseguendo i calcoli si trova

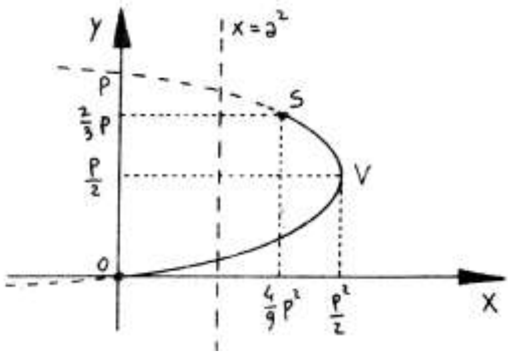
$$\boxed{2y^2 - 2py + a^2 = 0}$$

Con la y sottoposta alle limitazioni (2)

Ponendo ora $a^2 = x$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x = -2y^2 + 2py \\ x = a^2 \end{cases}$$

Che rappresentano una parabola con asse orizzontale e concavità rivolta verso sinistra, di cui dobbiamo considerare solo l'arco utile OS, e un fascio di rette verticali.



La retta verticale passa per O quando $a^2 = 0$, passa per S quando $a^2 = \frac{4}{9}p^2$, e passa per V quando $a^2 = \frac{p^2}{2}$.

Si ha quindi la situazione seguente