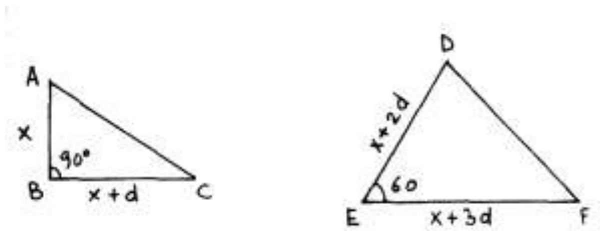
# Settembre 1940 – Primo problema

**Sono dati due triangoli ABC e DEF, il primo rettangolo in B, il secondo con l'angolo $\mathrm{DEF} = 60°$. Le misure dei segmenti AB, BC, DE, EF formano, nell'ordine scritto, una progressione aritmetica di ragione d positiva; inoltre la somma dei quadrati delle misure di AC e DF vale $md^2$ con m numero reale positivo dato.**
**Determinare la lunghezza del lato AB. Discussione.**




Poniamo AB = x  (con x > 0).
Indicando con x il termine più piccolo della progressione, gli altri termini sono x + d, x + 2d, x + 3d.
Applichiamo il teorema di Pitagora al primo triangolo. Si ottiene

$$AC^2 = x^2 + (x + d)^2$$

E, applicando il teorema di Carnot al secondo triangolo, si ha

$$DF^2 = (x + 2d)^2 + (x + 3d)^2 - 2(x + 2d)(x + 3d)\cos 60°$$

Applichiamo ora la relazione proposta dal problema

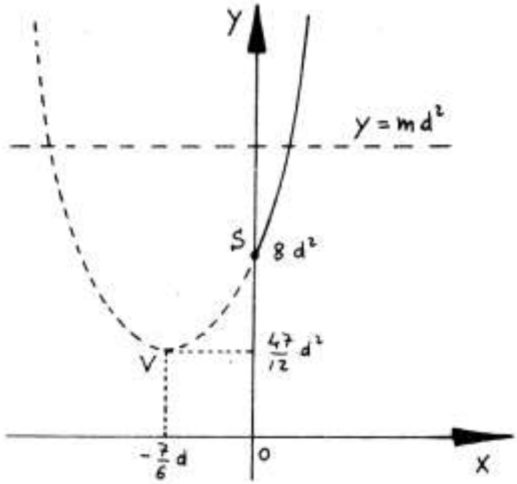
$$x^2 + x^2 + 2dx + d^2 + x^2 + 4dx + 4d^2 + x^2 +$$
$$+6dx + 9d^2 - x^2 - 3dx - 2dx - 6d^2 = md^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3x^2 + 7dx + 8d^2 - md^2 = 0 \\ x > 0 \end{array}}$$

Ponendo $md^2 = y$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 7dx + 8d^2 \\ y = md^2 \end{cases}$$

Cioè una parabola con vertice in $V \equiv \left(-\dfrac{7}{6}d; \dfrac{47}{12}d^2\right)$ di cui dovremo considerare solo la parte con ascissa positiva, e un fascio di rette orizzontali.




La retta del fascio passa per $S \equiv (0; 8d^2)$ quando

$$md^2 = 8d^2 \qquad \rightarrow \qquad m = 8$$

Si ha dunque sempre una soluzione per $m > 8$.

# Settembre 1940 – Secondo problema

**Disegnare, in coordinate cartesiane ortogonali, la curva**

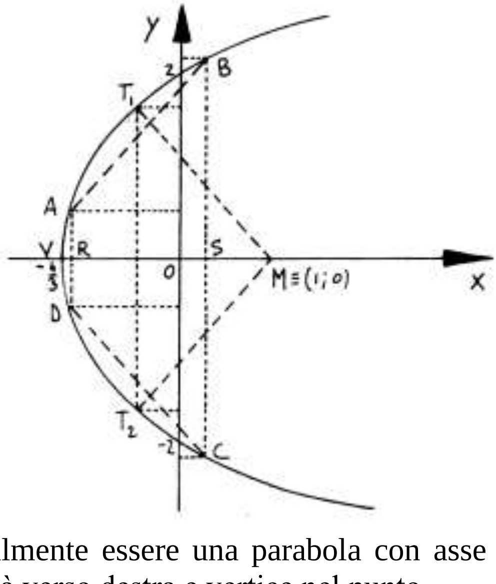
$$y^2 = 3x + 4$$

**e determinare i punti di essa che distano a da (0;1). Discussione.**

**Nell'ipotesi che sia** $a = \frac{\sqrt{85}}{4}$ **verificare che i punti di intersezione sono quattro, e determinare l'area del quadrangolo convesso da essi individuato.**

La funzione, riscritta nel modo seguente,

$$\boxed{(1) \quad x = \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}}$$




Si riconosce facilmente essere una parabola con asse coincidente con l'asse x, concavità verso destra e vertice nel punto

$$V \equiv \left( -\frac{4}{3}; 0 \right)$$

I punti cui fa riferimento il testo corrispondono ai punti comuni alla parabola e alla circonferenza di centro $M \equiv (1;0)$ e raggio variabile a (con a > 0).

Tale circonferenza ha equazione

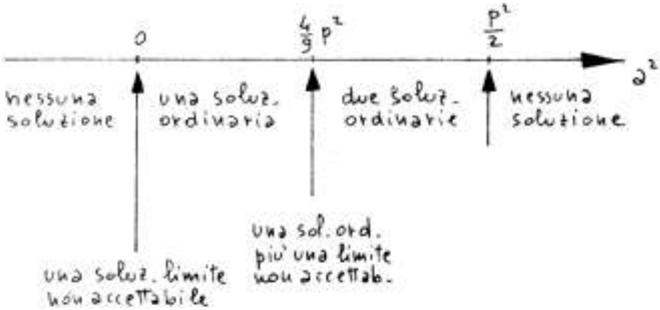
$$\boxed{(2) \qquad x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0}$$

Imponiamo la tangenza fra la (1) e la (2)

$$\begin{cases} y^2 = 3x + 4 \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x + 4 - 2x + 1 - a^2 = 0$$

$$\boxed{(3) \qquad x^2 + x + 5 - a^2 = 0}$$

$$\Delta = 1 - 4\left(5 - a^2\right) \geq 0 \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{19}{[4]}$$




Per valori di $a \geq \frac{\sqrt{19}}{2}$ si hanno intersezioni fra parabola e circonferenza.

Per $a = \frac{\sqrt{19}}{2}$ le curve risultano tangenti fra loro nei punti $T_1$ e $T_2$. Eseguendo i calcoli si trova

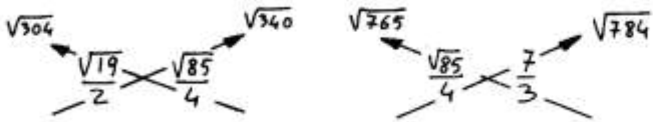
$$T_1 \equiv \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \qquad T_2 \equiv \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

Poiché

$$MV = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

La circonferenza generica di centro M risulta tangente alla parabola nel punto V quando  a = 7/3. Risulta allora la situazione seguente


Consideriamo ora il valore $a = \frac{\sqrt{85}}{4}$. Esso è compreso fra $\frac{\sqrt{19}}{2}$ e $\frac{7}{3}$ come si può ricavare dai prodotti incrociati




Risolvendo il sistema con $a = \frac{\sqrt{85}}{4}$ si trovano infatti i quattro punti

$$A \equiv \left(-\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right) \qquad B \equiv \left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$$

$$D \equiv \left(-\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right) \qquad C \equiv \left(\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{19}}{2}\right)$$

L'area del trapezio ABCD risulta essere

$$S = \frac{(AD+BC)\cdot RS}{2}$$

Cioè

$$S = \left(2\frac{\sqrt{19}}{2} + 2\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{2\left(1+\sqrt{19}\right)}{4}$$