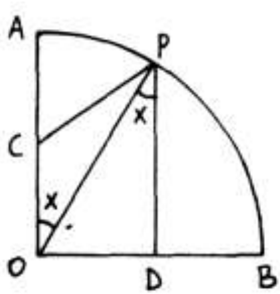
Luglio 1941 – Primo problema

Il settore circolare OAB è quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Determinare l'ampiezza dell'angolo che un raggio OP interno ad esso deve fare con OA affinché, detto C il punto medio del raggio OA e D la proiezione ortogonale di P su OB, si abbia

$$\mathbf{PC^2 + PD^2 = kr^2}$$

Dove k è un numero positivo dato. Discussione.



Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo COP

$$PC^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} - 2r\cos x = \frac{5}{4}r^2 - r^2\cos x$$

Inoltre nel triangolo POD è

$$\frac{PD}{PO} = \cos x \quad \rightarrow \quad PD = r\cos x \quad \rightarrow \quad PD^2 = r^2\cos^2 x$$

Applicando la relazione del testo si ottiene quindi

$$\frac{5}{4}r^2 - r^2\cos x + r^2\cos^2 x = kr^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 4\cos^2 x - 4\cos x + 5 - 4k = 0 \\ 0 < \cos x < 1 \end{array}}$$

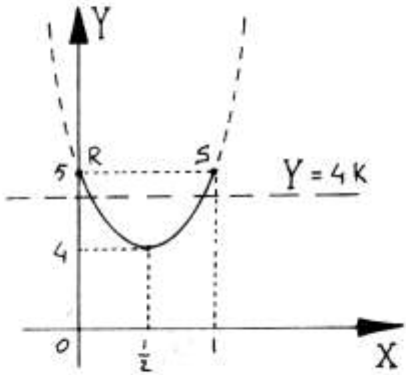
Poniamo ora

$$\begin{cases} \cos x = X \\ 4k = Y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = 4X^2 - 4X + 5 \\ Y = 4k \end{cases}$$

Cioè una parabola con vertice in $V \equiv \left(\frac{1}{2};4\right)$ di cui ci interessa solo l'arco utile RS, ed un fascio di rette orizzontali.



La retta del fascio passa per R ed S quando

$$4k = 5 \quad \rightarrow \quad k = \frac{5}{4}$$

E per V quando

$$4k = 4 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Si hanno dunque due soluzioni per

$$1 \leq k \leq \frac{5}{4}$$

Luglio 1941 – Secondo problema

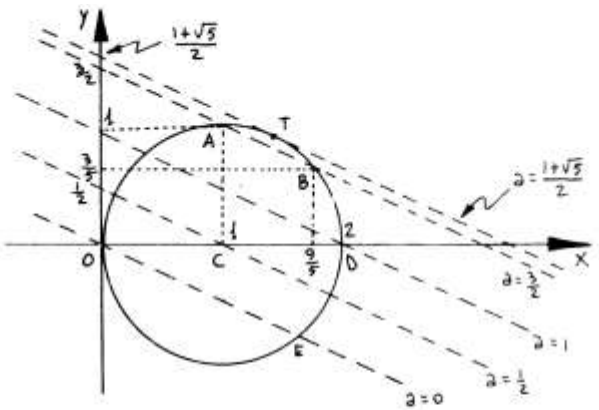
Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x + 2y = 2a \end{cases}$$

E discutere la realtà e il segno delle radici al variare di a, che si suppone positivo. Casi particolari:

$$a = \frac{1}{2} \qquad a = 1 \qquad a = \frac{3}{2} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

E' in facoltà del candidato di ritrovare i risultati per via geometrica, servendosi delle due linee (circonferenza e retta) rappresentate dalle due equazioni del sistema.



Le due equazioni corrispondono ad una circonferenza di centro (1,0) e raggio unitario, e di una retta che in forma esplicita diviene

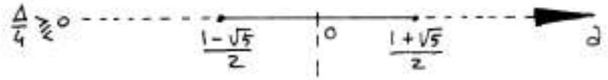
$$y = -\frac{1}{2}x + a$$

Il suo coefficiente angolare è m = -1/2 ed a (che il testo prescrive sia positivo) corrisponde al segmento intercettato sull'asse y.
Ricavando la y dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, si ricava

$$5x^2 - 2x\left(2a + 4\right) + 4a^2 = 0$$

Il sistema ammette soluzioni quando

$$\frac{\Delta}{4} = (2a+4)^2 - 20a^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -a^2 + a + 1 \geq 0$$



Poiché a deve essere positivo, ci saranno intersezioni reali e accettabili per

$$0 < a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Le ascisse delle intersezioni sono sempre positive e per $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si ha la tangenza in T.

E' facile verificare infine che per a = 1/2 la retta del fascio passa per C, per a = 1 la retta passa per D, ed infine per a = 3/2 si hanno due intersezioni nei punti

$$A \equiv (1;1) \qquad B \equiv \left(\frac{9}{5};\frac{3}{5}\right)$$