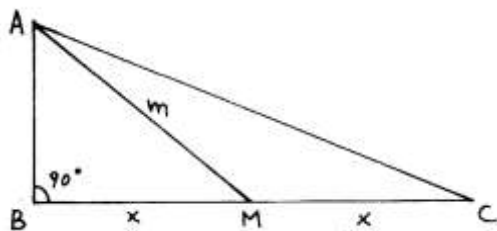


Settembre 1941 – Primo problema

Determinare le misure dei lati di un triangolo rettangolo, sapendo che la somma dei cateti misura $2s$ e che la mediana relativa al cateto maggiore è m .

Risolvere il problema anche per via geometrica.



Si ha

$$AB = \sqrt{m^2 - x^2}$$

E, applicando la relazione del testo,

$$AB + BC = 2s \quad \rightarrow \quad \sqrt{m^2 - x^2} + 2x = 2s$$

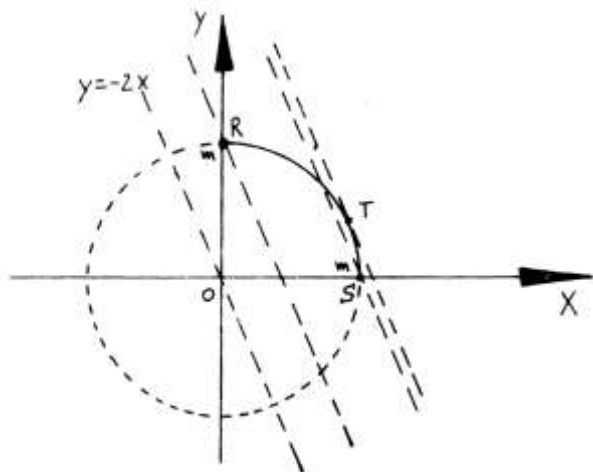
Ponendo

$$\sqrt{m^2 - x^2} = y \quad (\text{con } y \geq 0)$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases}$$

Cioè (considerando s come parametro variabile), un fascio di rette parallele e una circonferenza con centro nell'origine e raggio m .

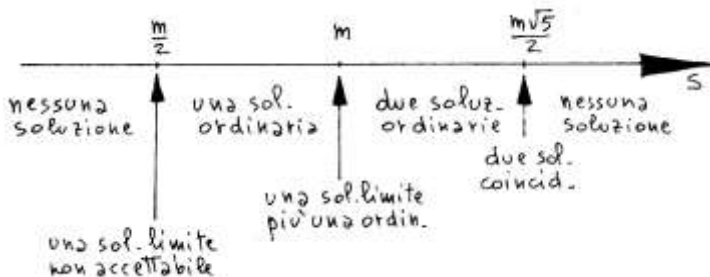


La retta del fascio passa per $R \equiv (0; m)$ quando $s = m/2$, passa per $S \equiv (m; 0)$ quando $s = m$, ed è tangente in T quando

$$5x^2 - 8sx + 4s^2 - m^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16s^2 - 5(4s^2 - m^2) = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm \frac{m\sqrt{5}}{2}$$

Dove però la soluzione negativa è da scartare perché deve essere $s > 0$.
Nel complesso si ha la situazione seguente



Settembre 1941 – Secondo problema

Una parabola, la cui equazione in coordinate cartesiane ortogonali è del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

passa per i punti $(0;-3)$, $(2;-3)$, $(3;0)$.

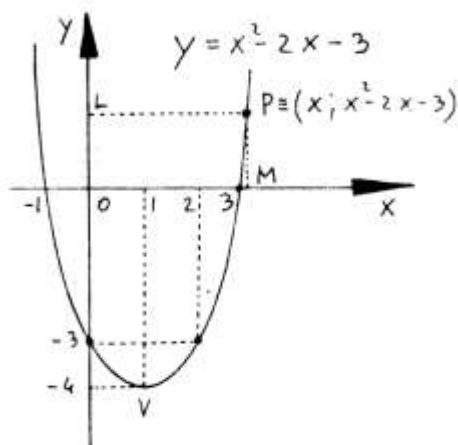
Dopo aver determinate i coefficienti a , b , c , disegnare la curva e trovare i punti di essa per i quali la differenza fra l'ordinata e l'ascissa è uguale ad un numero reale m .

Dire inoltre come varia, rispetto agli assi coordinati, la posizione dei suddetti punti al variare di m .

Imponendo il passaggio della parabola per i tre punti dati, si ha

$$\begin{cases} -3 = c \\ -3 = 4a + 2b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ b = -2a \\ 3a + b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

E quindi la parabola ha equazione



Un punto generico P appartenente alla parabola ha coordinate

$$P \equiv (x; x^2 - 2x - 3)$$

E perciò, applicando la condizione suggerita dal testo, si ha

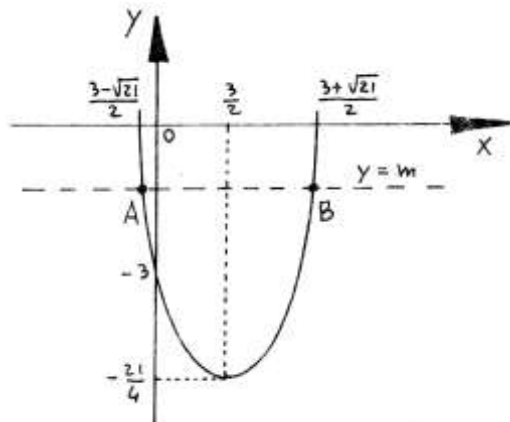
$$PM - PL = m \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 - x = m$$

$$(1) \quad x^2 - 3x - 3 - m = 0$$

Senza alcuna limitazione per la x . Ponendo $m = y$ si ha il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 3 \\ y = m \end{cases}$$

Cioè una parabola e un fascio di rette orizzontali.



Ci sono sempre due soluzioni per

$$m \geq -\frac{21}{9}$$

Le soluzioni del problema sono rappresentate dalle ascisse dei punti A e B, e la determinazione del loro segno risulta evidente dall'esame del grafico precedente.