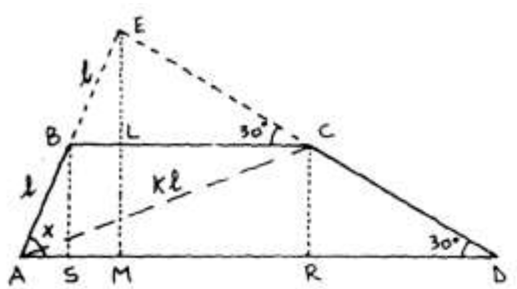
Luglio 1942 – Primo problema

Nel trapezio ABCD di basi AD, BC (con AD > BC), le lunghezze del lato obliquo AB e della diagonale AC sono rispettivamente ℓ e kℓ. Si sa inoltre che detto E il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati obliqui, l'altezza del triangolo ADE, relativa alla base AD, è doppia di quella del trapezio ed è uguale al lato obliquo DC. Determinare analiticamente o geometricamente, gli elementi incogniti del trapezio e discutere.



$$AD > BC \qquad AB = \ell \qquad AC = k\ell \text{ (con } k > 0)$$

$$EM = 2\,LM \qquad EM = DC$$

Osserviamo che essendo EM il doppio di LM, per il teorema di Talete è anche AE doppio di AB e ED doppio di CD.
Inoltre, essendo EM = CD, risulta LM (e quindi anche CR) pari alla metà di CD.
Dunque il triangolo CRD è mezzo triangolo equilatero, ed è

$$\widehat{CDR} = 30°$$

Poniamo ora

$$\widehat{BAS} = x \qquad \text{con } 0 < x \le 90°$$

Si ha

$$\frac{BS}{BA} = \text{sen}\,x \qquad \rightarrow \qquad BS = \ell\,\text{sen}\,x = CR$$

$$\frac{AM}{AE} = \cos x \qquad \rightarrow \qquad AM = 2\ell\cos x$$

$$CD = 2\cdot CR = 2\ell\,\text{sen}\,x$$

$$ED = 2\cdot CD = 4\ell\,\text{sen}\,x$$

$$\frac{MD}{ED} = \cos 30° \qquad \rightarrow \qquad MD = 2\ell\sqrt{3}\,\text{sen}\,x$$

$$AD = AM + MD = \qquad \rightarrow \qquad AD = 2\ell\cos x + 2\ell\sqrt{3}\,\text{sen}\,x$$

$$\frac{RC}{RD} = \text{tg}\,30° \qquad \rightarrow \qquad RD = \ell\sqrt{3}\,\text{sen}\,x$$

$$AR = AD - RD \qquad \rightarrow \qquad AR = 2\ell\cos x + \ell\sqrt{3}\,\text{sen}\,x$$

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo ARC.

$$\left(2\ell\cos x + \ell\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\right)^2 + \left(\ell\,\text{sen}\,x\right) = k^2\ell^2$$

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x + 4\,\text{sen}^2 x = k^2$$

$$4 + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x = k^2$$

$$4\sqrt{3}\,\text{sen}\,x\cos x = k^2 - 4$$

$$2\sqrt{3}\,\text{sen}\,2x = k^2 - 4$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \text{sen}\,2x = \dfrac{k^2-4}{2\sqrt{3}} \\ & 0 \le \text{sen}\,2x \le 1 \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$\begin{cases} \cos 2x = X \\ \text{sen}\,2x = Y \end{cases}$$

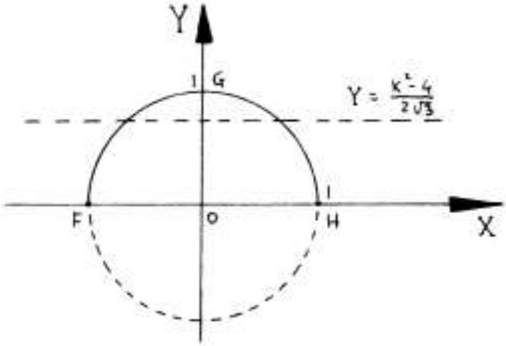
E associamo alla (1) la relazione fondamentale della trigonometria

$$\text{sen}^2\,2x + \cos^2 2x = 1$$

Si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} Y = \dfrac{k^2-4}{2\sqrt{3}} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

Costituito da un fascio di rette orizzontali e una circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine.



La retta del fascio passa per F ed H quando

$$\frac{k^2-4}{2\sqrt{3}}=0 \quad \to \quad k^2-4=0 \quad \to \quad k=2$$

Passa per G quando

$$\frac{k^2-4}{2\sqrt{3}}=1 \quad \to \quad k^2=4+\sqrt{3} \quad \to \quad k=1+\sqrt{3}$$

Quindi ci sono due soluzioni per $2 \le k \le 1+\sqrt{3}$

Luglio 1942 – Secondo problema

Fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e scritta l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per i punti (0;1), (2;2), (4;5), si determinino

1) **Le coordinate dei punti A, B intersezioni della parabola con la retta passante per il punto P = (0;2) e formante l'angolo α col semiasse positivo delle ascisse.**
2) **Le equazioni delle tangenti alla parabola nei punti A e B, l'angolo fra esse compreso e le coordinate del loro punto comune C.**
3) **L'equazione della retta PC e l'angolo che essa forma con la retta AB.**
4) **Le lunghezze dei due segmenti AB, PC e l'area del triangolo ABC.**
5) **L'area del segmento parabolico inscritto nel triangolo ABC.**

Imponiamo il passaggio della parabola generica

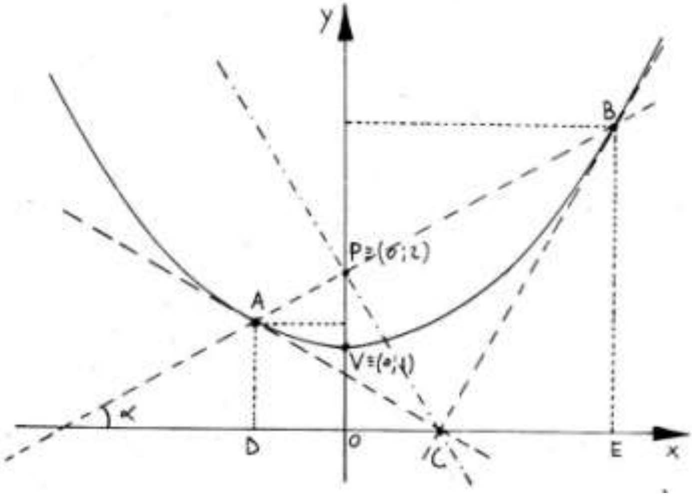
$$y = ax^2 + bx + c$$

per i tre punti dati, si ha

$$\begin{cases} 1 = c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ 5 = 16a + 4b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b = 1 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ a = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

E quindi la parabola ha equazione

$$\boxed{(1) \qquad y = \frac{1}{4}x^2 + 1}$$



Indichiamo con m = tg α il coefficiente angolare della retta generica passante per P. La sua equazione è

$$\boxed{(2) \qquad y = mx + 2}$$

Le coordinate dei punti A e B corrispondono alle soluzioni del sistema formato dalle (1) e (2).
Confrontando fra loro i due secondi membri si ha

$$mx + 2 = \frac{1}{4}x^2 + 1 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - 4mx - 4 = 0$$

$$x = 2m \pm \sqrt{4m^2 + 4} = 2\left(m \pm \sqrt{m^2 + 1}\right)$$

Ricordando le formule ricavate nel problema del settembre 1925, si ha

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}} = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}} \end{cases}$$

E perciò

$$m = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{e} \quad \sqrt{m^2+1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Quindi le ascisse di A e B sono

$$x = 2\left(\operatorname{tg}\alpha \pm \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 2\frac{\operatorname{sen}\alpha \pm 1}{\cos\alpha}$$

Mentre le ordinate

$$y = m \cdot 2\frac{\operatorname{sen}\alpha \pm 1}{\cos\alpha} + 2 = 2\left(m \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha \pm 1}{\cos\alpha} + 1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\frac{\operatorname{sen}\alpha \pm 1}{\cos\alpha} + 1\right) = 2\frac{\operatorname{sen}^2\alpha \pm \operatorname{sen}\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= 2\frac{1 \pm \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Risulta dunque

$$\begin{cases} A \equiv \left(2\dfrac{\operatorname{sen}\alpha - 1}{\cos\alpha}; 2\dfrac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \\ B \equiv \left(2\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha}; 2\dfrac{1 \pm + \operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \end{cases}$$

Determiniamo ora le equazioni delle due rette tangenti alla parabola e passanti per A e B.

La derivata della parabola è

$$y' = \frac{x}{2}$$

E quindi

$$\begin{cases} m_A = f'\left(2\frac{\operatorname{sen}\alpha - 1}{\cos\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha - 1}{\cos\alpha} \\ m_B = f'\left(2\frac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Eseguendo i calcoli si trovano per le rette tangenti le equazioni

$$\begin{cases} \text{retta per A} \rightarrow \quad y = \frac{\operatorname{sen}\alpha - 1}{\cos\alpha}x + 2\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\ \text{retta per B} \rightarrow \quad y = \frac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha}x - 2\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

Esse contrano in

$$\boxed{C \equiv (2m; 0)}$$

Le due rette tangenti sono perpendicolari fra loro. Per dimostrarlo basta far vedere che

$$m_A \cdot m_B + 1 = 0$$

Ed infatti risulta

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - 1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha} + 1 = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} + 1 = 0$$

$$-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = 0$$

$$-1 + 1 = 0$$

La retta PC ha equazione

$$y = -\frac{1}{m}x + 2$$

Ed è quindi perpendicolare alla retta AB avente equazione (2). Risulta inoltre

$$AB = \frac{4}{\cos^2\alpha}$$

$$PC = \frac{2}{\cos\alpha}$$

E perciò l'area del triangolo ABC è

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot PC}{2} = \frac{4}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{2}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\cos^3\alpha}$$

Ed infine l'area del trapezoide ABED è

$$S = \int_{2\frac{\operatorname{sen}\alpha-1}{\cos\alpha}}^{2\frac{\operatorname{sen}\alpha+1}{\cos\alpha}} \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} + x \right]_{2\frac{\operatorname{sen}\alpha-1}{\cos\alpha}}^{2\frac{\operatorname{sen}\alpha+1}{\cos\alpha}} = ... = \frac{16}{3\cos^3\alpha}$$