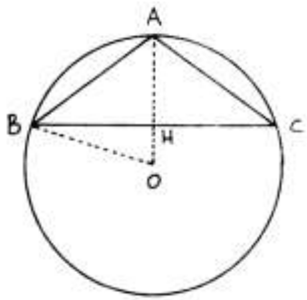
Marzo 1942 – Sessione straordinaria

Determinare l'angolo alla base e i lati di un triangolo isoscele ottusangolo conoscendone il raggio r del cerchio circoscritto e la differenza kr fra il doppio della base e il triplo dell'altezza. Discussione.
E' facoltativa la risoluzione geometrica.



Poniamo

$$\begin{cases} BH = x \qquad \text{con} \;\; 0 < x < r \\ AH = y \qquad \text{con} \;\; 0 < y < r \end{cases}$$

Essendo

$$HO = r - y$$

Si ha

$$x^2 + (r-y)^2 = r^2$$

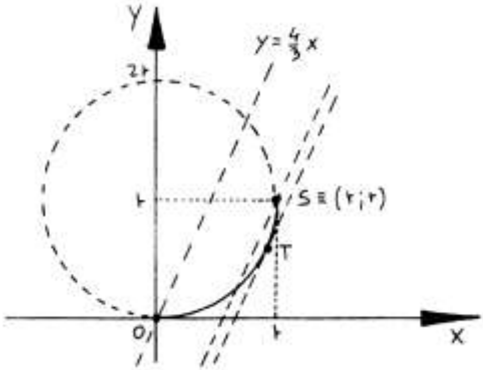
$$\boxed{(2) \qquad\qquad x^2 + y^2 - 2ry = 0}$$

Inoltre, applicando la relazione del testo, è

$$4x - 3y = kr$$

$$\boxed{(2) \qquad\qquad y = \frac{4}{3}x - \frac{kr}{3}}$$

Le soluzioni del problema sono costituite dalle intersezioni fra le curve (1) e (2), che sono rispettivamente una circonferenza e un fascio di rette parallele.



La retta del fascio passa per O quando k = 0, passa per S quando k = 1, ed è tangente alla circonferenza in T quando

$$25y^2 + 2y(3kr - 16r) + k^2r^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (3kr - 16r)^2\ 25k^2r^2 = 0$$

$$k^2 + 6k - 16 = 0$$

$$k\begin{cases} = 2 \\ = -8 \end{cases}$$

Dove la soluzione negativa è da scartare perché per tale valore la (2) diviene una retta che intercetta un segmento positivo sull'asse y (e per tali rette, come risulta dal grafico, non possono esserci soluzioni).
Quindi si ha la situazione seguente