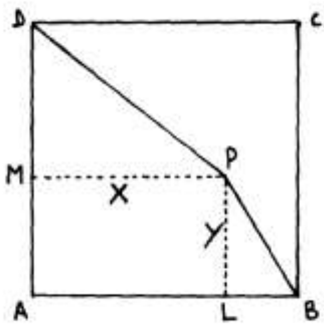
Settembre 1942 – Problema unico

Internamente al quadrato ABCD di lato A, trovare un punto P tale che la sua distanza dal vertice D sia doppia di quella dal vertice opposto B, e che risulti uguale a k il rapporto delle due distanze dai due lati consecutivi AB, AD.
Discussione.



$$AB = BC = CD = DA = a$$
$$PD = 2\ PB \qquad MP/PL = k$$

Poniamo

$$PM = x \quad \text{con} \quad 0 < x < a$$
$$LP = y \quad \text{con} \quad 0 < y < a$$

Si ha

$$LB = a - x \quad \rightarrow \quad PB = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

$$MD = a - y \quad \rightarrow \quad PD = \sqrt{x^2 + (a-y)^2}$$

E perciò, applicando le due relazioni del testo, si ha il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (a-y)^2} = 2\sqrt{(a-x)^2 + y^2} \\ \dfrac{y}{x} = k \end{cases}$$

Cioè

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{2}{3}ay + a^2 = 0 \\ y = kx \end{cases}}$$

Corrispondenti ad una circonferenza con centro nel punto

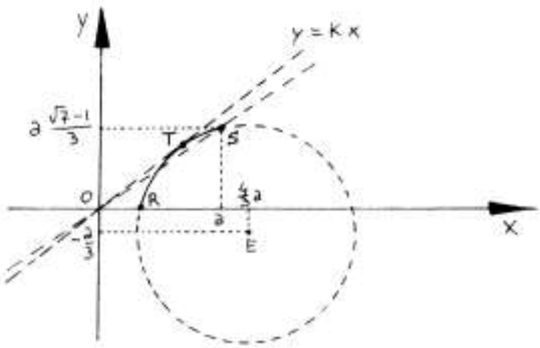
$$E \equiv \left(\frac{4}{3}a; -\frac{a}{3} \right)$$

E raggio

$$r = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

E una retta generica passante per l'origine.
Per le limitazioni cui sono sottoposte x ed y, dovremo considerare l'arco RS di circonferenza, con

$$R \equiv \left(a\frac{4-\sqrt{7}}{3}; 0 \right) \qquad S \equiv \left(a; a\frac{\sqrt{7}-1}{3} \right)$$



La retta del fascio passa per R quando k = 0, passa per S quando

$$a\frac{\sqrt{7}-1}{3} = ka \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

Ed è tangente in T quando

$$\frac{\Delta}{4} = (4a - ak)^2 - 3a^2(3 + 3k^2) = 0$$

$$k = \frac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{4}$$

Dove la soluzione negativa va scartata. E perciò