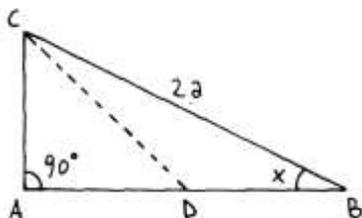


Gennaio 1943 – Sessione straordinaria

Di un triangolo rettangolo ABC si conosce l'ipotenusa $BC = 2a$ e la somma k della mediana relativa al cateto AB con la metà del cateto stesso.

Risolvere il triangolo assumendo come incognita l'angolo ABC.

Discussione.



$$AD = DB \quad CD + DB = ka$$

Poniamo

$$ABC = x \quad \text{con } 0 < x < 90^\circ$$

Risulta

$$\frac{AB}{BC} = \cos x \quad \rightarrow \quad AB = 2a \cos x$$

$$DB = a \cos x$$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo CDB si ottiene

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{4a^2 + a^2 \cos^2 x - 2 \cdot 2a \cdot a \cos x \cdot \cos x} = \\ &= a\sqrt{4 - 3\cos^2 x} \end{aligned}$$

Imponendo la relazione del testo si ha

$$a\sqrt{4 - 3\cos^2 x} + a \cos x = ka$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{4 - 3\cos^2 x} &= k - \cos x \\ 0 < \cos x < 1 \end{aligned}}$$

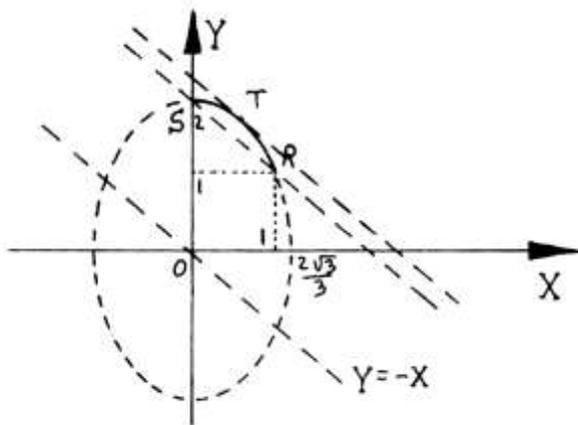
Ponendo

$$\begin{cases} \cos x = X & \text{con } 0 < X < 1 \\ \sqrt{4 - 3\cos^2 x} = Y & \text{con } Y \geq 0 \end{cases}$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} Y = -X + k \\ \frac{X^2}{\frac{4}{3}} + \frac{Y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Costituito da un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -1$ ed una ellisse con semiassi $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $b = 2$ (cioè con asse maggiore sull'asse x).



Per le limitazioni precedenti dovremo però considerare solo l'arco RS di ellisse.

La retta del fascio passa per R ed S quando $k = 2$, ed è tangente all'ellisse quando

$$4x^2 - 2kx + k^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 4(k^2 - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad k = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

E la tangenza in T corrisponde alla soluzione positiva perché k è il punto in cui la retta taglia l'asse y .

Quindi il problema ha due soluzioni quando

$$2 < k \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Per $k = 2$ si ha una sola soluzione limite perché quella corrispondente all'intersezione S non è accettabile.