Luglio 1947, primo problema

In un sistema di assi cartesiani ortogonali è dato il cerchio avente il centro nell'origine O degli assi e raggio $\sqrt{5}$.
Determinare i valori dei parametri h e k in modo che le rette

$$x + 2y - h = 0$$

$$2x + y - k = 0$$

Risultino tangenti al cerchio rispettivamente in A e B del primo quadrante.
Determinare inoltre le coordinate dei punti di contatto A e B e del punto C di intersezione delle due tangenti.

Determinare infine la tangente trigonometrica dell'angolo $\widehat{AOB}$.

L'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

Mettiamo a sistema l'equazione della circonferenza con ciascuno dei due fasci di rette

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = h - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ y = k - 2x \end{cases}$$

Eliminiamo una delle due incognite in entrambi i sistemi

$$h^2 - 4hy + 4y^2 + y^2 - 5 = 0 \qquad k^2 - 4kx + 4xy^2 + x^2 - 5 = 0$$

$$5y^2 - 4hy + h^2 - 5 = 0 \qquad 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$$

E imponiamo le condizioni di tangenza

$$\frac{\Delta}{4} = 4h^2 - 5\left(h^2 - 5\right) = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4k^2 - 5\left(k^2 - 5\right) = 0$$

$$h = \pm 5 \qquad k = \pm 5$$

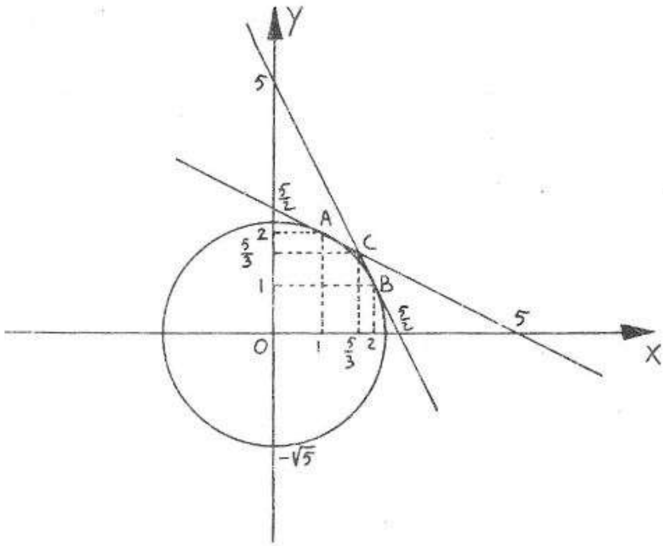
In entrambi i casi il segno negativo va scartato perché i punti di tangenza A e B si devono trovare nel primo quadrante e quindi nelle equazioni delle rette in forma esplicita

$$y = mx + q$$

il termine noto q deve essere positivo.
Le rette tangenti hanno dunque equazione

$$x + 2y - 5 = 0$$

$$2x + y - 5 = 0$$



Risolvendo i due sistemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

Si trovano le coordinate dei punti

$$B \equiv (2;1) \qquad A \equiv (1;2)$$

Per determinare le coordinate di C basta mettere a sistema le equazioni delle due rette

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

E si ottiene

$$C \equiv \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3} \right)$$

Passando all'ultima domanda, si ha

$$\begin{cases} \text{coefficiente angolare retta OA} \rightarrow \quad m_1 = 2 \\ \text{coefficiente angolare retta OB} \rightarrow \quad m_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

E quindi

$$\tan AOB = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

Luglio 1947, secondo problema

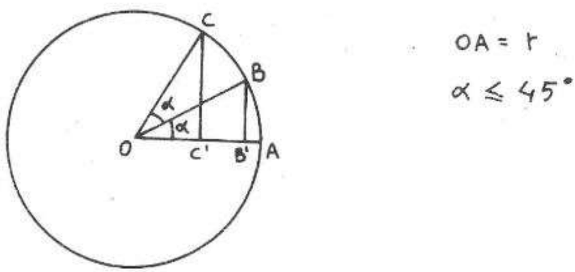
I due settori circolari consecutivi AOB, BOC del cerchio di centro O e raggio r, hanno ciascuno l'angolo al centro di ampiezza α = 45°. Si determini l'angolo al centro α in modo che sia k il rapporto fra il maggiore e il minore dei due solidi generati dai due settori dati, in una rotazione completa attorno alla retta OA. Si consideri il caso particolare

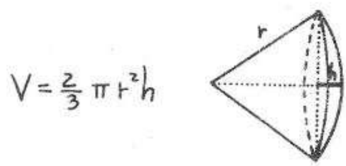
$$k = 2 + \sqrt{2}$$

N.B. Per la risoluzione del problema il candidato può ricordare che se si ha un settore circolare AOB, ed H è la proiezione ortogonale di B su OA, il volume del solido generato dal settore in una rotazione completa attorno alla retta OA è dato da

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h$$

Dove r ed h sono rispettivamente le misure di OA ed HA.





Ciascun settore, con una rotazione completa attorno ad OA genera un settore sferico.

Determiniamo AB' e AC'

$$OB' = r\cos\alpha$$

$$AB' = r - r\cos\alpha = r\left(1-\cos\alpha\right)$$

$$OC' = r\cos 2\alpha$$

$$AC' = r - r\cos 2\alpha = r\left(1-\cos 2\alpha\right) = r\left(1-\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\right) =$$

$$= r\left(1-\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha\right) = 2r\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

Imponiamo la relazione del problema

$$\frac{V_{OCA}}{V_{OBA}} = k \qquad \text{con } k > 1$$

$$\frac{\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2r\left(1+\cos\alpha\right)\left(1-\cos\alpha\right)}{\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r\left(1-\cos\alpha\right)} = k$$

Semplificando e dividendo per $\left(1-\cos\alpha\right)$, si ha

$$2\left(1+\cos\alpha\right) = k$$

Con la condizione $\cos\alpha \neq 1$ cioè $\alpha \neq 0°$.

Poiché α può variare fra 0° e 45°, l'equazione parametrica da discutere è

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\cos\alpha + 2 - k = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\alpha < 1 \qquad (k > 1) \end{array}}$$

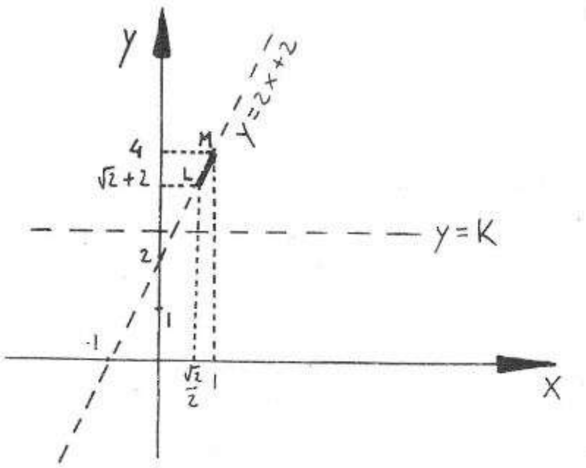
Basta porre

$$\begin{cases} \cos\alpha = x \\ k = y \end{cases}$$

Per ottenere

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = k \end{cases}$$

Cioè l'equazione di un fascio di rette parallele all'asse x ed una retta di cui però (a causa delle limitazioni) dobbiamo considerare solo il segmento LM, le cui ascisse sono comprese fra $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed 1. Le rette del fascio invece basta che abbiano ordinata maggiore di 1.



Poiché le ordinate dei punti L ed M sono $2+\sqrt{2}$ e 4, il problema ha sempre una soluzione per

$$\boxed{2+\sqrt{2} \leq k < 4}$$

Nel caso particolare $k = 2+\sqrt{2}$ si ha

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45°$$