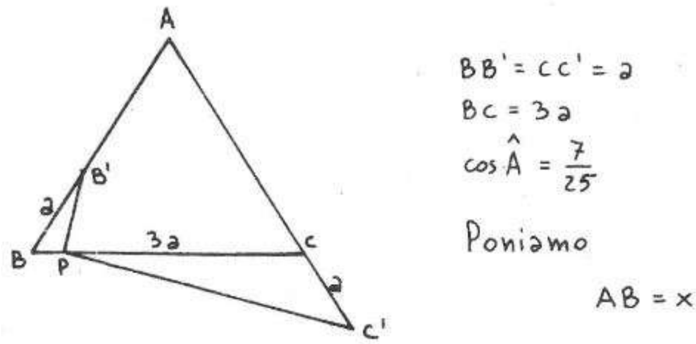
Settembre 1947, primo problema

Dato il triangolo isoscele ABC la cui base BC misura 3° e il cui angolo al vertice BAC **ha per coseno 7/25, si indichino con B' e C' due punti situati il primo sul lato BA e il secondo sul prolungamento del lato AC dalla parte di C, in modo che sia**

BB' = CC' = a

Determinare sulla base BC un punto P in modo che la somma dei quadrati delle misure delle sue distanze da B' e da C' sia $2k^2a^2$ essendo k un numero reale dato. Discussione.



Applicando il teorema di Carnot

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$9a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \frac{7}{25}$$

$$9a^2 = \frac{36}{25}x^2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{2}a$$

$$\boxed{AB = AC = \frac{5}{2}a}$$

Sfruttando la prima relazione fondamentale calcoliamo il seno dell'angolo in A

$$\text{sen}\,A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$$

E, applicando il teorema dei seni al triangolo isoscele,otteniamo il seno degli angoli alla base

$$AC : \operatorname{sen} B = BC : \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{AC \cdot \operatorname{sen} A}{BC} = \frac{\frac{5}{2}a \cdot \frac{24}{25}}{3a} = \frac{4}{5}$$

Infine, usando nuovamente la relazione fondamentale, si arriva al coseno degli angoli alla base

$$\cos B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Quindi

$$\boxed{\cos B = \cos C = \frac{3}{5}}$$

Consideriamo ora il triangolo BB’P, poniamo

$$BP = x$$

E calcoliamo $B'P^2$ con il teorema di Carnot

$$B'P^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \frac{3}{5}$$

Cioè

$$\boxed{B'P^2 = a^2 + x^2 - \frac{6ax}{5}}$$

Passiamo ora al triangolo PCC’. Poiché

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$$

Si ha

$$\cos PCC' = -\cos ACB = -\frac{3}{5}$$

È inoltre

$$PC = 3a - x$$

$$CC' = a$$

Applicando Carnot si trova

$$PC'^2 = PC^2 + CC'^2 - 2\cdot PC\cdot CC'\cdot \cos PCC'$$

$$PC'^2 = (3a-x)^2 + a^2 - 2(3a-x)a\left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$= 9a^2 - 6ax + x^2 + a^2 + \frac{6}{5}a(3a-x) =$$

$$= 10a^2 - 6ax + x^2 + \frac{18}{5}a^2 - \frac{6}{5}ax$$

$$\boxed{PC'^2 = \frac{68}{5}a^2 - \frac{36}{5}ax + x^2}$$

Imponiamo finalmente la relazione del problema

$$B'P^2 + PC'^2 = 2k^2a^2$$

$$a^2 + x^2 - \frac{6}{5}ax + \frac{68}{5}a^2 - \frac{36}{5}ax + x^2 = 2k^2a^2$$

$$\boxed{10x^2 - 42ax + 73a^2 - 10k^2a^2 = 0}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere, con

$$\boxed{0 \le x \le 3a \quad \text{con } a > 0}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

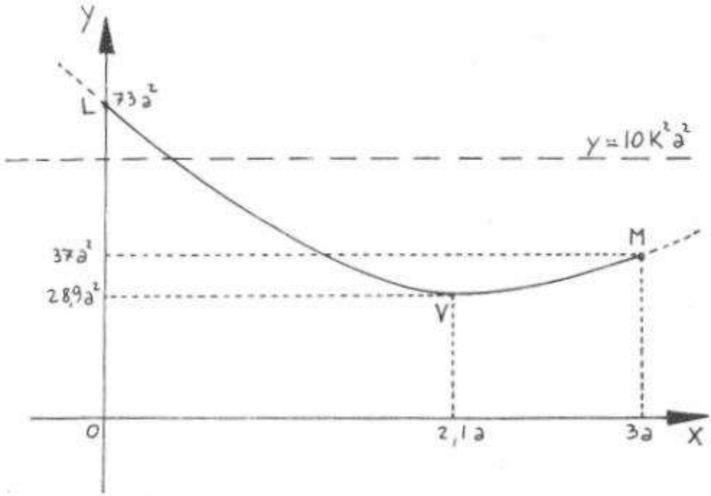
$$10k^2a^2 = y$$

Si ottiene

$$\begin{cases} y = 10x^2 - 42ax + 73a^2 \\ y = 10k^2a^2 \end{cases}$$

Cioè una parabola e un fascio di rette orizzontali. La parabola ha asse verticale, concavità verso l'alto, e vertice con coordinate

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{21}{10}a = 2{,}1a \\ V_y = \dfrac{289}{10}a^2 = 28{,}9a^2 \end{cases}$$



Essa taglia l’asse y nel punto di ordinata $73a^2$ e non ha alcuna intersezione con l’asse x.
Poiché la x deve avere valori compresi fra 0 e 3°, dovremo considerare solo l’arco di parabola che va da L ad M

$$L \equiv \left(0; 73a^2\right) \qquad M \equiv \left(3a; 37a^2\right)$$

Le soluzioni del problema al variare del parametro sono costituite dalle intersezioni fra l’arco utile LM di parabola e il fascio di rette orizzontali.
Si ha una soluzione limite per

$$10k^2a^2 = 73a^2 \qquad \rightarrow \qquad k^2 = 7{,}3$$

Un’altra soluzione limite per

$$10k^2a^2 = 37a^2 \qquad \rightarrow \qquad k^2 = 3{,}7$$

Due soluzioni reali e coincidenti per

$$10k^2a^2 = 28{,}9a^2 \qquad \rightarrow \qquad k^2 = 2{,}89$$

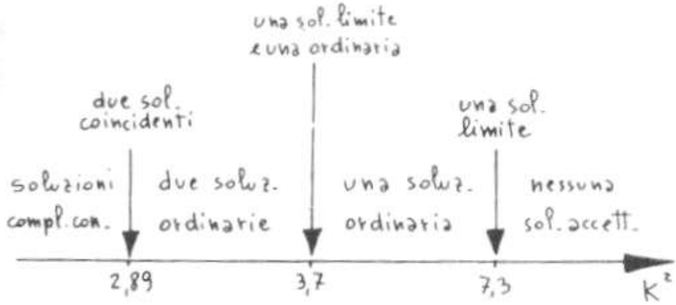
Una soluzione ordinaria per

$$3{,}7 < k^2 < 7{,}3$$

Due soluzioni ordinarie per

$$2{,}89 < k^2 < 3{,}7$$

Cioè, riassumendo,


una sol. limite
e una ordinaria
due sol.
coincidenti
una sol.
limite
soluzioni
compl. con.
due soluz.
ordinarie
una soluz.
ordinaria
nessuna
sol. accett.
2,89
3,7
7,3
K^2

Settembre 1947, secondo problema

In un sistema di coordinate cartesiane di origine O è data la parabola

$$y = 4 - x^2$$

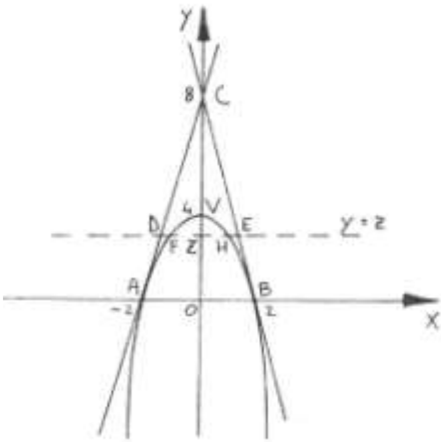
che taglia l'asse x nei punti A e B, e l'asse delle ordinate nel punto V. E' dato inoltre sull'asse y il punto C di ordinata 8.
Nell'equazione

$$y = mx + 8$$

Determinare i due valori di m per i quali la retta è tangente alla parabola e verificare che i punti di contatto sono A e B.
Determinare poi su OV un punto Z di ordinata z tale che tracciando per esso la parallela all'asse delle x, e dette D ed E le intersezioni di essa con le tangenti già considerate, e F d H le intersezioni con la parabola, valga la relazione

$$\frac{DE}{FH} = k$$

Dove k è un numero positivo. Discussione.



Mettiamo a sistema la parabola e il fascio di rette con centro C

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = mx + 8 \end{cases}$$

$$-x^2+4=mx+8$$

$$x^2+mx+4=0$$

$$\Delta=0 \quad \rightarrow \quad m^2-16=0 \quad \rightarrow \quad m=\pm 4$$

Quindi le due rette tangenti hanno equazione

$$y=\pm 4x+8$$

Le coordinate dei punti di tangenza sono

$$\begin{cases} y=-x^2+4 \\ y=4x+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-x^2+4 \\ y=-4x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Che coincidono proprio con i punti A e B. La retta orizzontale passante per Z ha equazione

$$y = z$$

e le coordinate di E ed H sono

$$\begin{cases} y=-4x^2+8 \\ y=z \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-x^2+4 \\ y=z \end{cases}$$

$$E \equiv \left(\frac{8-z}{4};z\right) \qquad H \equiv \left(\sqrt{4-z};z\right)$$

Risulta allora

$$DE=2\frac{8-z}{4}=\frac{8-z}{2} \qquad FH=2\sqrt{4-z}$$

E perciò, applicando la relazione del problema

$$\frac{DE}{FH}=k \qquad \rightarrow \qquad \frac{\frac{8-z}{2}}{2\sqrt{4-z}}$$

$$8-z=4k\sqrt{4-z}$$

Il punto Z deve essere compreso fra O e V, quindi la variabile z ha sempre valori compresi fra 0 e 4, ed il radicando è allora sempre positivo. L'equazione può dunque essere elevata al quadrato senza che sia necessario imporre condizioni restrittive alla variabile Si ha

$$64-16z+z^2=16k^2(4-z)$$

Cioè

$$\boxed{\begin{array}{c} z^2 - 16z\left(1-k^2\right) + 64\left(1-k^2\right) = 0 \\ 0 \le z < 4 \qquad (k > 0) \end{array}}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. Poniamo $y = z^2$
Avremo

$$\begin{cases} y = z^2 \\ y = 16z\left(1-k^2\right) - 64\left(1-k^2\right) \end{cases}$$

Cioè una parabola di cui ci interessa solo l'arco con ascisse comprese fra 0 e 4, e un fascio di rette con centro che si può ottenere dando a k due valori arbitrari

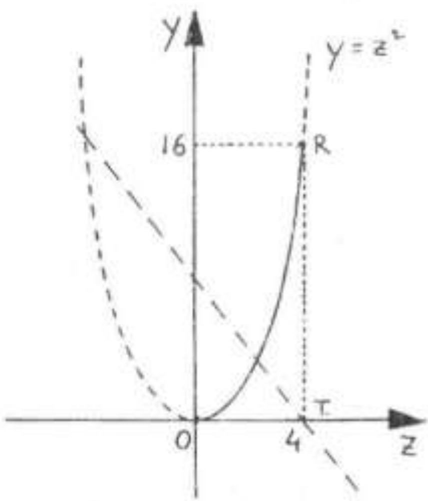
$$k = 0 \quad \to \quad y = 16z - 64$$

$$k = 1 \quad \to \quad y = 0$$

E perciò

$$T \equiv (4;0)$$

La retta del fascio avrà sempre una intersezione con l'arco OR di parabola (vedi figura seguente) per tutti i valori del coefficiente angolare delle rette del fascio, comprese fra zero e meno infinito.



Dunque una sola soluzione per

$$m \le 0 \qquad \to \qquad 16\left(1-k^2\right) \le 0$$

Cioè

$$\boxed{k \geq 1}$$

In quanto k può assumere solo valori positivi.