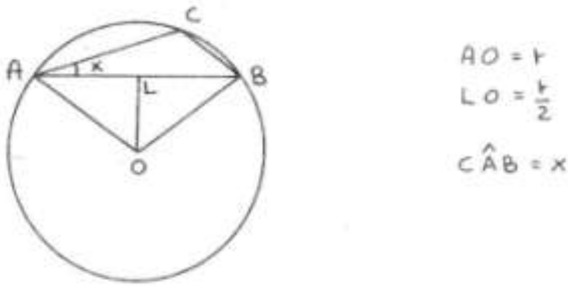
Luglio 1948, primo problema

In un cerchio di raggio r è condotta una corda AB la cui distanza dal centro è r/2. Inscrivere nel segmento circolare che non contiene il centro, un triangolo ABC in modo che i lati AC e CB soddisfino la relazione

$$2AC + 3BC = 2kr$$

Essendo k un numero positivo assegnato. Determinare l'angolo $CAB = x$ **, i lati AC, CB e discutere il problema.**
E' in facoltà del candidato di considerare anche il caso che il triangolo sia inscritto nell'altro segmento circolare e di risolvere il problema per via geometrica.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ALO, si ha

$$AL = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

E quindi

$$AB = r\sqrt{3}$$

Che corrisponde al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza.
Ne deriva che

$$ACB = 180° - 60° = 120°$$

$$CBA = 180° - 120° - x = 60° - x$$

Applichiamo il teorema della corda per calcolare CB

$$CB = 2r\,\mathrm{sen}\,x$$

E il teorema dei seni per calcolare AC

$$AC : \mathrm{sen}\left(60 - x\right) = AB : \mathrm{sen}\,120$$

$$AC = \frac{AB \cdot \mathrm{sen}\left(60 - x\right)}{\mathrm{sen}\,120} = \frac{r\sqrt{3}\left(\mathrm{sen}\,60\cos x - \cos 60\,\mathrm{sen}\,x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{AC = r\left(\sqrt{3}\cos x - \mathrm{sen}\,x\right)}$$

Imponiamo la relazione del problema

$$2\,AC + 3\,BC = 2kr$$

$$2r\left(\sqrt{3}\cos x - \mathrm{sen}\,x\right) + 6r\,\mathrm{sen}\,x = 2kr$$

$$\boxed{(1) \qquad 2\,\mathrm{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = k}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere.
Riguardo alle limitazioni, il valore minimo per l'angolo x è zero (quando C coincide con B), mentre il valore massimo è di 60° perché quando C coincide con A l'angolo $CBA = 0$, ma la somma dei tre angoli interni deve essere 180, e perciò

180° - 0° - 120° = 60°

Quindi deve essere

$$\boxed{(2) \qquad 0 \le x \le 60 \qquad \text{con } k > 0}$$

Per eseguire la discussione grafica si deve considerare, associata alla (1), la relazione fondamentale

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

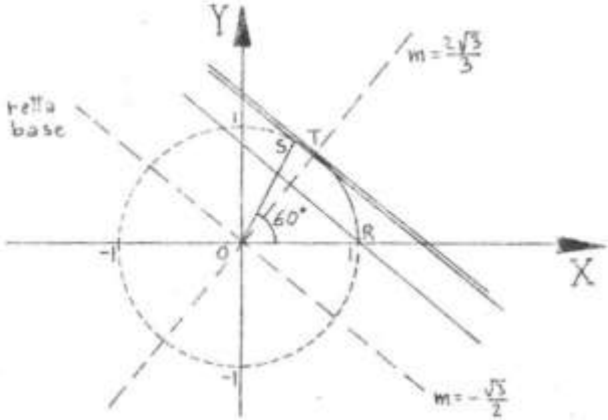
Ed operare un cambiamento di variabili ponendo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \mathrm{sen}\,x = Y \end{cases}$$

(questa posizione è suggerita dal fatto che, preso un punto sulla circonferenza unitaria con centro nell'origine, le sue coordinate sono appunto cos x e sen x).
Con tale sostituzione si ha

$$\begin{cases} 2Y + X\sqrt{3} = k \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{o meglio} \quad \boxed{\begin{cases} Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}X + \dfrac{k}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ed una circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario.



Dovremo considerare solo l'arco RS della circonferenza con

$$R \equiv (1;0) \qquad\qquad S \equiv \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Per calcolare le coordinate del punto T basta osservare che il coefficiente angolare di tutte le rette del fascio è $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi la retta OT perpendicolare al fascio e passante per l'origine ha equazione

$$Y = \frac{2\sqrt{3}}{3}X$$

Mettendola a sistema con la circonferenza si ottiene

$$T \equiv \left(\frac{\sqrt{21}}{7};\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$$

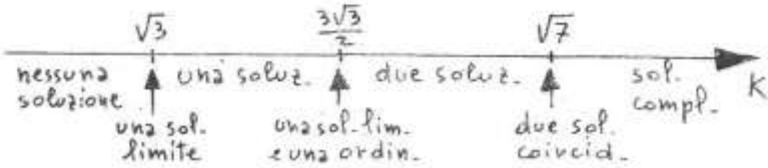
Imponiamo ora il passaggio delle rette del fascio per R, S, T per ricavare i corrispondenti valori del parametro k

$$R \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{k}{2} \qquad \rightarrow \qquad k = \sqrt{3}$$

$$S \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{k}{2} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$T \quad \rightarrow \quad \frac{2\sqrt{7}}{7} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} + \frac{k}{2} \qquad \rightarrow \qquad k = \sqrt{7}$$

Se la retta del fascio si trova nella zona intermedia fra R ed S, si ha una intersezione e perciò una sola soluzione. Mentre se la retta si trova nella zona intermedia fra S e T, le intersezioni sono due e due sono le soluzioni.
Nel complesso si ha la situazione seguente



Infine, circa la parte facoltativa, se il punto C si trova nel segmento circolare contenente il centro, si ha

$$ACB = 60°$$

$$CBA = 180° - 60° - x = 120° - x$$

E l'equazione parametrica da discutere diviene

$$\boxed{\begin{array}{l} 4\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = k \\ 0 \le x \le 120 \qquad \text{con } k > 0 \end{array}}$$

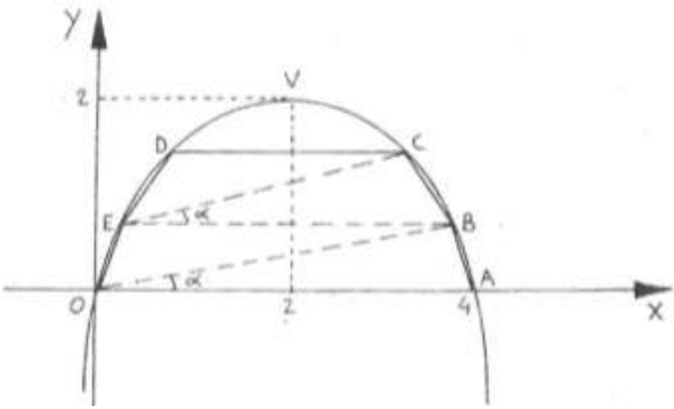
Luglio 1948, secondo problema

La parabola di equazione

$$y = 2x - \frac{x^2}{2}$$

Sega l'asse delle x, oltre che nell'origine O, in un punto A. I punti A, B, C, D, E, O sono vertici consecutivi di un esagono convesso inscritto nel settore parabolico di base OA, il quale ha la diagonale EB e il lato CD paralleli ad OA e le diagonali OB ed EC parallele fra loro e inclinate su OA di un angolo la cui tangente trigonometrica è k.

a) **Si determinino le coordinate dei vertici A, B, C, D, E e si stabilisca fra quali limiti può variare k.**
b) **Si determini l'area dell'esagono OABCDE e si trovi il valore di k per cui essa assume il valore massimo.**
c) **(Facoltativo) Il candidato può risolvere il quesito a) nell'ipotesi che l'esagono sia intrecciato.**



La parabola $y = 2x - \frac{x^2}{2}$

Ha vertice nel punto $C \equiv (2;2)$

Ponendo $\text{tg}\,\alpha = k$

La retta OB ha equazione $y = kx$ e perciò le coordinate di B si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = kx \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases}$$

$$kx = -\frac{x^2}{2} + 2x \quad \rightarrow \quad x(x - 4 + 2k) = 0$$

Si ha

$$\begin{cases} x = 0 & \leftarrow \quad \text{ascissa di O} \\ x = 4 - 2k & \leftarrow \quad \text{ascissa di B} \end{cases}$$

E quindi
$$\boxed{B \equiv \left(4 - 2k; 4k - 2k^2\right)}$$

Il punto E ha la stessa ordinata di B ($y = 4k - 2k^2$) mentre l'ascissa si può ottenere sostituendo questa espressione nell'equazione della parabola

$$4k - 2k^2 = -\frac{x^2}{2} + 2x \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 8k - 4k^2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - \left(8k - 4k^2\right)} = 2 \pm (2 - 2k)$$

$$\begin{cases} x = 4 - 2k & \leftarrow \quad \text{ascissa di B} \\ x = 2k & \leftarrow \quad \text{ascissa di E} \end{cases}$$

E quindi

$$\boxed{E \equiv \left(2k; 4k - 2k^2\right)}$$

Determiniamo l'equazione della retta EC considerando il fascio di rette con centro E

$$y - \left(4k - 2k^2\right) = m(x - 2k)$$

E ponendo $m = k$ (perché le rette EC e OB sono parallele ed hanno quindi lo stesso coefficiente angolare)

$$y - \left(4k - 2k^2\right) = k(x - 2k)$$

$$y = kx + 4k - 4k^2$$

Mettendo a sistema questa retta con la parabola, si ottengono le coordinate di C

$$\begin{cases} y = kx + 4k - 4k^2 \\ y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases}$$

$$kx + 4k - 4k^2 = -\frac{x^2}{2} + 2x$$

$$x^2 + x(2k-4) + 8k - 8k^2 = 0$$

$$x = -(k-2) \pm \sqrt{(k-2)^2 - (8k - 8k^2)} =$$

$$= 2 - k \pm (3k-2) = \begin{cases} 2k & \rightarrow \text{ ascissa di E} \\ 4-4k & \rightarrow \text{ ascissa di C} \end{cases}$$

È dunque

$$\boxed{C \equiv (4-4k; 8k-8k^2)}$$

L'ordinata di D è infine la stessa di C, cioè $y = 8k - 8k^2$.
Sostituendo questa espressione nella parabola si ottiene anche l'ascissa di D

$$8k - 8k^2 = -\frac{x^2}{2} + 2x$$

$$x^2 - 4x + 16k - 16k^2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - (16k - 16k^2)} = 2 \pm \sqrt{16k^2 - 16k + 4}$$

$$= 2 \pm (4k-2) = \begin{cases} 4k & \rightarrow \text{ ascissa di D} \\ 4-4k & \rightarrow \text{ ascissa di C} \end{cases}$$

E perciò

$$\boxed{D \equiv (4k; 8k-8k^2)}$$

Vediamo ora entro quali limiti può variare il parametro k. Il valore minimo è $k = 0$, corrispondente al caso in cui $\alpha = 0$ e cioè D = E = O e C = B = A.
Il valore massimo si ha invece quando D = V = C, cioè quando le ascisse di C e V sono uguali

$$4 - 4k = 2$$
$$k = \tfrac{1}{2}$$

quindi

$$\boxed{0 \le k \le \frac{1}{2}}$$

Passiamo ora a calcolare l'area dell'esagono. Esso è formato da due trapezi isosceli sovrapposti, le cui basi ed altezze sono rispettivamente

$$OA = 4$$

$$EB = 4 - 2k - 2k = 4 - 4k$$

$$DC = 4 - 4k - 4k = 4 - 8k$$

$$h_1 = B_y = 4k - 2k^2 \qquad h_2 = C_y - B_y = 4k - 6k^2$$

E perciò le loro aree sono

$$S_{OABE} = \frac{4 + (4 - 4k)}{2}\left(4k - 2k^2\right) = 4k\left(k - 2\right)^2$$

$$S_{EBCD} = \frac{(4 - 4k) + (4 - 8k)}{2}\left(4k - 6k^2\right) = 4k\left(3k - 2\right)^2$$

La superficie dell'esagono è allora

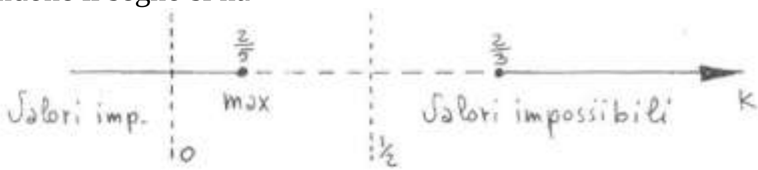
$$S = 4k\left(k - 2\right)^2 + 4k\left(3k - 2\right)^2$$

$$\boxed{S = 8k\left(5k^2 - 8k + 4\right)}$$

Questa è la funzione da massimizzare. Calcoliamone la derivata

$$S' = 8\left(15k^2 - 16k + 4\right)$$

Studiandone il segno si ha



Quindi il massimo cercato è

$$\boxed{k = \frac{2}{5}}$$