

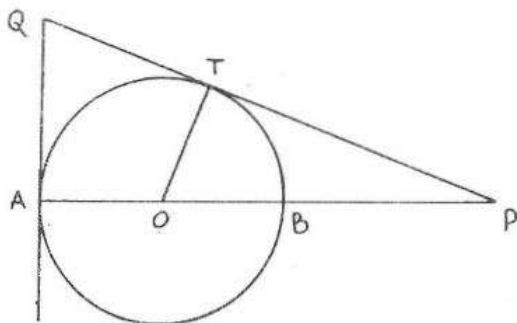
Settembre 1948, primo problema

Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$ determinare sul prolungamento di AB , oltre B , un punto P tale che si abbia

$$PT^2 + TQ^2 = k PA^2$$

Con k numero reale positivo, ove T è il punto di contatto di una delle tangenti condotte da P alla circonferenza e Q il punto di intersezione di questa tangente con quella condotta da A alla circonferenza stessa.

Discutere il problema.



Poniamo

$$BP = x \quad \text{con } x \geq 0$$

Il triangolo OTP è rettangolo e perciò

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = (r + x)^2 - r^2 = x(2r + x)$$

Il triangolo QAP è simile al triangolo OTP (hanno un angolo in comune e sono entrambi rettangoli) e quindi vale la proporzione

$$AP : AQ = TP : TO$$

$$\begin{aligned} AQ &= \frac{AP \cdot TO}{TP} = \frac{(2r + x)r}{\sqrt{2rx + x^2}} = \frac{\sqrt{(2r + x)^2} \cdot r}{\sqrt{x} \sqrt{2r + x}} = \\ &= \frac{\sqrt{2r + x} \cdot r}{\sqrt{x}} = \frac{r\sqrt{2rx + x^2}}{x} \end{aligned}$$

Ma è

$$AQ = QT$$

E allora

$$QT^2 = \frac{r^2(2rx + x^2)}{x^2} = \frac{r^2(2r + x)}{x}$$

$$PA^2 = (2r + x)^2$$

Imponendo la relazione fornita dal problema si ottiene

$$x(2r + x) + \frac{r^2(2r + x)}{x} = k(2r + x)$$

Dividiamo i due membri per $2r + x$ essendo senz'altro $x \neq -2r$

$$x + \frac{r^2}{x} = k(2r + x)$$

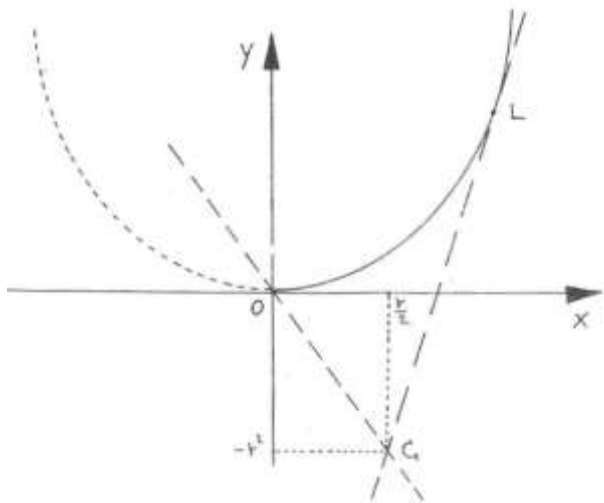
Eliminiamo il denominatore (con la condizione suppletiva $x \neq 0$). Si ha

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2(k-1) + 2krx - r^2 = 0 \\ x > 0 \quad k > 0 \end{array}}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. Poniamo $x^2 = y$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y(k-1) + 2krx - r^2 = 0 \end{cases}$$

Si ha una parabola con vertice nell'origine ed asse verticale di cui dovremo considerare solo i punti con ascissa positiva, e un fascio di rette di cui, al solito, possiamo determinare il centro dando a k due valori arbitrari.



$$k = 0 \quad \rightarrow \quad -y - r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -r^2$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad 2rx - r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{r}{2}$$

E quindi

$$C \equiv \left(\frac{r}{2}; -r^2 \right)$$

Il coefficiente angolare delle rette del fascio è

$$(1) \quad m = \frac{2kr}{1-k}$$

Calcoliamo per quale valore di k la retta del fascio è tangente alla parabola in L

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y(k-1) + 2k + x - r^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2(k-1) + 2k + x - r^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 r^2 + (k-1)r^2 = 0$$

$$k^2 + k - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Il valore negativo va scartato perché deve essere $k > 0$. L'altro valore corrisponde quindi alla tangenza in L .

La retta del fascio è invece verticale quando $m = \infty$ cioè, ricordando la (1), quando $k = 1$.

La retta del fascio ha due intersezioni con la parabola quando il suo coefficiente angolare è compreso fra la posizione verticale e la tangenza in L. Dunque il sistema ha due soluzioni quando

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq k < 1$$

Calcoliamo ora per quale valore di k la retta del fascio passa per l'origine.

Imponiamo alla retta

$$y = \frac{2kr}{1-k}x + \frac{r^2}{k-1}$$

Di passare per (0;0). Si ottiene

$$0 = \frac{r^2}{k-1} \rightarrow k-1 = \infty \rightarrow k = \infty$$

La retta del fascio ha una sola soluzione se il suo coefficiente angolare varia fra la posizione verticale ($k = 1$) e la posizione in cui passa per l'origine ($k = \infty$).

Quindi il problema ammette una soluzione quando

$$\boxed{k \geq 1}$$

Settembre 1948, secondo problema

In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

Condurre dall'origine delle coordinate una retta del primo quadrante tale che, dette A, B le intersezioni con la parabola, e C e D le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x, il rapporto del trapezio ABCD e del quadrato di lato CD sia k, con k numero reale positivo.

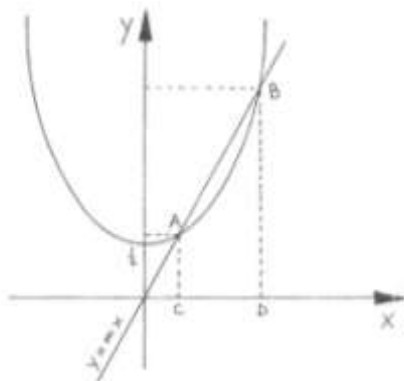
Discutere il problema.

La parabola

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

Ha l'asse coincidente con l'asse y, concavità verso l'alto e vertice nel punto

$$V \equiv \left(0; \frac{1}{2}\right)$$



La retta generica passante per l'origine ha equazione $y = mx$.
Mettendo a sistema con la parabola e risolvendo, si ottengono le coordinate dei punti A, B, C, D.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow 2mx = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2mx + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = m \pm \sqrt{m^2 - 1} \\ y = m^2 \pm m\sqrt{m^2 - 1} \end{cases}$$

E quindi

$$A \equiv (m - \sqrt{m^2 - 1}; m^2 - m\sqrt{m^2 - 1})$$

$$B \equiv (m + \sqrt{m^2 - 1}; m^2 + m\sqrt{m^2 - 1})$$

$$C \equiv (m - \sqrt{m^2 - 1}; 0)$$

$$D \equiv (m + \sqrt{m^2 - 1}; 0)$$

Le ordinate di A e B costituiscono le due basi del trapezio, mentre la sua altezza è

$$CD = (m + \sqrt{m^2 - 1}) - (m - \sqrt{m^2 - 1}) = 2\sqrt{m^2 - 1}$$

La sua area è dunque

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{(AC + BD) \cdot CD}{2} = \\ &= \frac{(m^2 - m\sqrt{m^2 - 1} + m^2 + m\sqrt{m^2 - 1}) \cdot 2\sqrt{m^2 - 1}}{2} = \\ &= 2m^2\sqrt{m^2 - 1} \end{aligned}$$

La superficie del quadrato è invece

$$S_q = CD^2 = 4(m^2 - 1)$$

Applichiamo ora al relazione del problema

$$\frac{S_T}{S_q} = k \quad \text{con } k > 0$$

$$\frac{2m^2\sqrt{m^2-1}}{4(m^2-1)} = k$$

$$(1) \quad m^2 = 2k\sqrt{m^2-1}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. In essa deve risultare

$$m^2 - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad m \geq 1$$

(la soluzione negativa va scartata perché la retta deve passare per il primo quadrante).

Eseguiamo la discussione geometrica ponendo

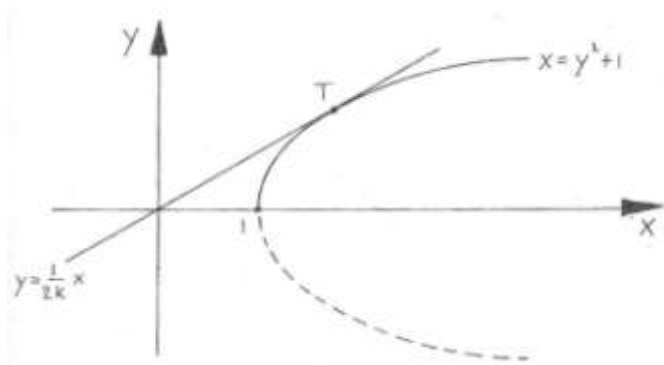
$$\begin{cases} m^2 = x \\ \sqrt{m^2-1} = y \end{cases}$$

Dalla (1) si ottiene

$$\begin{cases} x = 2ky \\ \sqrt{x-1} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2k}x \\ x = y^2 + 1 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro nell'origine e una parabola con vertice in $(1;0)$, asse coincidente con l'asse x , concavità verso destra e di cui dobbiamo considerare solo i punti con ordinata positiva o nulla perché $y = \sqrt{x-1}$ e il radicale non può assumere valori negativi.

Si ha il grafico seguente



Calcoliamo il valore di k per cui si ha la tangenza

$$\begin{cases} x = y^2 + 1 \\ x = 2ky \end{cases} \Rightarrow 2ky = y^2 + 1 \rightarrow y^2 - 2ky + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 1 = 0 \rightarrow k = 1$$

Scartiamo la soluzione negativa perché deve essere $k > 0$.

Il coefficiente angolare delle rette del fascio è $1/2k$ e la retta è orizzontale quando $k = \infty$.

Si avranno dunque due intersezioni, cioè due soluzioni per ogni valore

$$\boxed{k \geq 1}$$