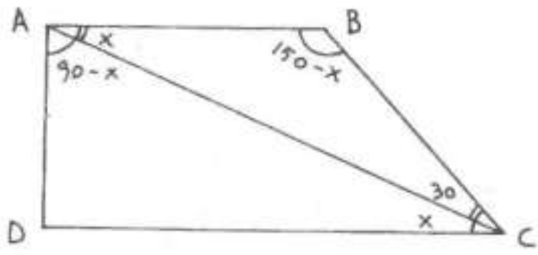
Luglio 1949, primo problema

Nel trapezio rettangolo convesso ABCD gli angoli di vertici A e D sono retti e l'angolo $\widehat{ACB}$ **formato dalla diagonale AC e dal lato CB è di 30°.**
Determinare gli angoli del trapezio di vertici B e C sapendo che la somma della base CD e del multiplo secondo il numero m dell'altezza AD ha con la base AB un rapporto k.
Fissato un valore di m, in quali intervalli dovrà variare k, affinché il problema ammetta una o due soluzioni ?

N.B. Si consiglia di assumere come incognita l'angolo $\widehat{CAB} = x$ **.**
Parte facoltativa:

1) **Per quali valori di k la base CD risulta uguale, maggiore o minore della base AB ?**
2) **Risolvere la questione geometricamente.**



Poniamo $\widehat{CAB} = x$ con $0 < x < 90°$ (a seconda che il trapezio abbia altezza nulla o infinita).

E' anche $\widehat{ACD} = x$ perché alterno esterno rispetto al precedente.
Quando, come in questo problema, non viene fornita la lunghezza di alcun segmento, si indica arbitrariamente uno dei segmenti più importanti con una lettera. Quasi sempre avviene che tale lettera viene eliminata per semplificazione, nello sviluppo dei calcoli. Nel nostro caso poniamo

$$AD = h$$

Nel triangolo ADC risulta

$$\frac{AD}{DC} = \operatorname{tg} x \quad \to \quad DC = \frac{h}{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{AD}{AC} = \operatorname{sen} x \quad \to \quad AC = \frac{h}{\operatorname{sen} x}$$

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC, per calcolare AB

$$AB : \operatorname{sen} 30 = AC : \operatorname{sen}(150 - x)$$

$$AB = \frac{AC \cdot \operatorname{sen} 30}{\operatorname{sen}(150 - x)} = \frac{\dfrac{h}{2 \operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} 150 \cos x - \cos 150 \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{h}{\operatorname{sen} x \left(\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \right)}$$

Applichiamo la relazione fornita dal problema

$$\frac{DC + m \cdot AD}{AB} = k \qquad \to \qquad \frac{\dfrac{h}{\operatorname{tg} x} + mh}{\dfrac{h}{\operatorname{sen} x \left(\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \right)}}$$

Come avevamo previsto, semplificando si elimina la lettera h e si ottiene

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + m = \frac{k}{\operatorname{sen} x \left(\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \right)}$$

In cui, avendo già posto $\operatorname{sen} x \neq 0$, possiamo eliderlo.

$$\left(\cos x + m \operatorname{sen} x \right)\left(\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \right) = k$$

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + m \operatorname{sen} x \cos x +$$
$$+ m\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x = k\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \right)$$

$$\operatorname{sen}^2 x \left(m\sqrt{3} - k \right) + \operatorname{sen} x \cos x \left(m + \sqrt{3} \right) + \cos^2 x (1 - k) = 0$$

E, dividendo per $\cos^2 x$, si ha

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{tg}^2 x \left(m\sqrt{3} - k \right) + \operatorname{tg} x \left(m + \sqrt{3} \right) + 1 - k = 0 \\ 0 < x < 90 \qquad k > 0 \end{gathered}}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere.
Poniamo

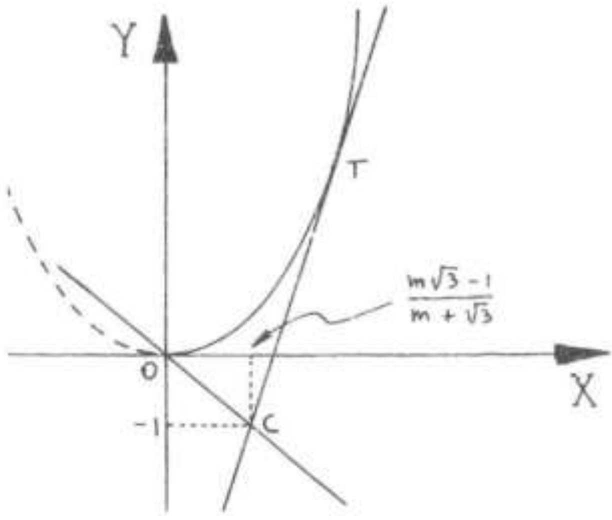
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = X \\ \operatorname{tg}^2 x = Y \end{cases}$$

Si ha

$$\boxed{(1) \quad \begin{cases} Y = \dfrac{m+\sqrt{3}}{k-m\sqrt{3}} X + \dfrac{1-k}{k-m\sqrt{3}} \\ Y = X^2 \end{cases}}$$

Cioè un fascio di rette e una parabola di cui dobbiamo considerare solo l'arco per cui si ha X > 0.
Il centro del fascio, al solito, si ricava dando a k due valori arbitrari (per esempio $k = 1$ e $k = m\sqrt{3}$, e risolvendo il sistema così ottenuto

$$C \equiv \left(\frac{m\sqrt{3}-1}{m+\sqrt{3}} ; -1 \right)$$



Determiniamo ora per quale valore si ha la tangenza in T. eliminiamo la Y nella (1) e poniamo Δ = 0.

$$X^2\left(k-m\sqrt{3}\right)-X\left(m+\sqrt{3}\right)-1+k=0$$

$$\Delta = \left(m + \sqrt{3}\right)^2 - 4\left(k - m\sqrt{3}\right)\left(k - 1\right) = 0$$

Cioè, semplificando,

$$4k^2 - 4k\left(m\sqrt{3} + 1\right) - \left(m - \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$\boxed{k = \frac{m\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{m^2 + 1}}{2}}$$

Dove abbiamo scartato la soluzione con il segno meno perché corrispondente alla tangenza con l'arco di parabola tratteggiato.
La retta del fascio è verticale quando il coefficiente angolare, vedi la (1), è infinito, cioè quando

$$k - m\sqrt{3} = 0 \quad \rightarrow \quad k = m\sqrt{3}$$

Infine la retta del fascio passa per l'origine quando il termine noto della (1) è nullo, cioè quando

$$1 - k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Quindi il problema ha due soluzioni per

$$m\sqrt{3} < k < \frac{m\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{m^2 + 1}}{2}$$

E una soluzione per

$$1 < k < m\sqrt{3}$$

(o con i segni di disuguaglianza invertiti, a seconda del valore di m).
Infine i segmenti AB e DC invertono il loro ruolo di base maggiore e minore, quando x = 60° (in tal caso il trapezio diventa un quadrato).
Si ha allora

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione parametrica si ricava

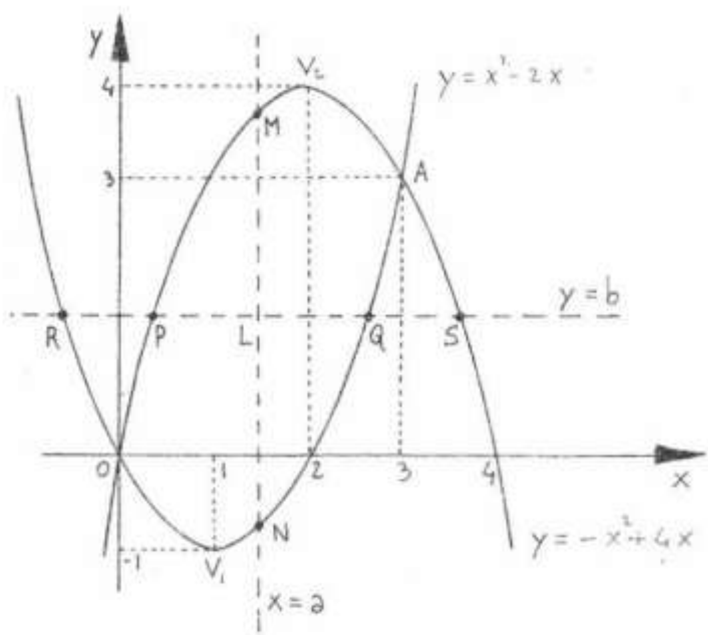
$$k = m\sqrt{3} + 1$$

Luglio 1949, secondo problema

Siano date, in un sistema di assi cartesiani ortogonali, le parabole di equazione

$$y = x^2 - 2x \qquad y = 4x - x^2$$

Considerate le rette parallele agli assi di equazione y = a, y = b, determinare a, b, in modo che risultino massimi i segmenti MN, PQ di tali rette appartenenti alla regione comune alle due parabole e aventi estremi N, Q sulla prima e M, P sulla seconda parabola.
Determinare inoltre l'area di tale regione.
Parte facoltativa:
Denominati con R, S gli ulteriori punti di intersezione della retta PQ con la prima e con la seconda parabola, dimostrare che le tangenti ad esse nei quattro punti R, P, Q, S determinano un parallelogramma.
Dimostrare infine che il quadrilatero MPNQ è un rombo e che il punto comune alle diagonali del rombo coincide col punto comune alle diagonali del parallelogramma.



Per la parabola $y = x^2 - 2x$ si ha $V_1 \equiv (1;-1)$ mentre per l'altra è $V_2 \equiv (2;4)$.

Risolvendo il sistema fra le due equazioni si trovano le coordinate dei due punti comuni

$$O \equiv (0;0) \qquad A \equiv (3;3)$$

La generica retta verticale x = a taglia le parabole nei punti

$$\begin{cases} M \equiv \left(a;-a^2+4a\right) \\ N \equiv \left(a;a^2-2a\right) \end{cases}$$

Passiamo ora alla generica retta orizzontale di equazione y = b. Esplicitiamo la x nella equazione delle due parabole e consideriamo la variabile y come se fosse un parametro noto

$$x^2 - 2x - y = 0 \quad \to \quad x = 1 \pm \sqrt{1+y}$$

Con il segno più si ha l'ascissa di Q, e con il segno meno l'ascissa di R.

$$x^2 - 4x + y = 0 \quad \to \quad x = 2 \pm \sqrt{4-y}$$

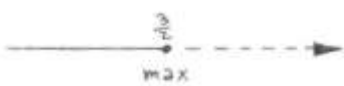
Con il segno più si ha l'ascissa di S, e con il segno meno l'ascissa di P.
Avremo quindi

$$\begin{cases} P \equiv \left(2-\sqrt{4-b};b\right) \\ Q \equiv \left(1+\sqrt{1+b};b\right) \end{cases}$$

Le lunghezze dei due segmenti MN e PQ sono perciò

$$\begin{cases} MN = \left(-a^2+4a\right)-\left(a^2-2a\right) = -2a^2+6a \\ PQ = \left(1+\sqrt{1+b}\right)-\left(2-\sqrt{4-b}\right) = \sqrt{1+b}+\sqrt{4-b}-1 \end{cases}$$

Per determinare il valore massimo di ciascuno dei due segmenti, calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno

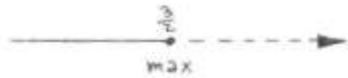


$$y' = -4a + 6 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{3}{2} \quad \text{(massimo)}$$

Invece per PQ si ha

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+b}} + \frac{-1}{2\sqrt{4-b}} = \frac{\sqrt{4-b}-\sqrt{1+b}}{2\sqrt{1+b}\sqrt{4-b}}$$

Analizzando il denominatore si ricava che b può assumere solo valori compresi fra -1 e 4, e che in tale intervallo il denominatore stesso è sempre positivo.
Ci si può quindi limitare allo studio del segno del numeratore. Si ha ancora



$$b = \frac{3}{2} \quad \text{(massimo)}$$

Passiamo ora al calcolo dell'area della sezione piana racchiusa fra le due parabole

$$S = \int_0^3 \left[\left(-x^2+4\right)-\left(x^2-2x\right)\right]dx =$$

$$= \int_0^3 \left(-2x^2+6x\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3 = 9$$

Rispondiamo infine alla parte facoltativa.
Nel caso in cui a = b = 3/2 le coordinate dei punti R, P, Q, S sono:

$$R \equiv \left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{3}{2}\right) \qquad P \equiv \left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$Q \equiv \left(1+\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{3}{2}\right) \qquad S \equiv \left(2+\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{3}{2}\right)$$

Le derivate delle due parabole sono:

$$\begin{cases} y' = 2x-2 \\ y' = -2x+4 \end{cases}$$

E, i coefficienti angolari nei punti di tangenza, sono per la prima parabola

$$f'\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=-\sqrt{10} \qquad \text{nel punto R}$$

$$f'\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\sqrt{10} \qquad \text{nel punto Q}$$

E per la seconda parabola

$$f'\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\sqrt{10} \qquad \text{nel punto P}$$

$$f'\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=-\sqrt{10} \qquad \text{nel punto S}$$

Poiché i coefficienti angolari sono uguali a due a due, le quattro tangenti formano un parallelogramma.
Infine (sempre nel caso a = b = 3/2) le coordinate di M ed N sono:

$$M\equiv\left(\frac{3}{2};\frac{15}{4}\right) \qquad N\equiv\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right)$$

Ebbene, poiché $L\equiv\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ è il punto medio di PQ e di MN, il quadrilatero M, Q, N, P è un rombo.
Resta da dimostrare che anche il parallelogramma formato dalle quattro tangenti in R, P, Q, S ha le diagonali che si incontrano in L.
Tralasciando i calcoli possiamo affermare che ciò è vero in quanto per ragioni di simmetria

$$RP = QS = 1$$

E i coefficienti angolari dei lati sono $\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$.