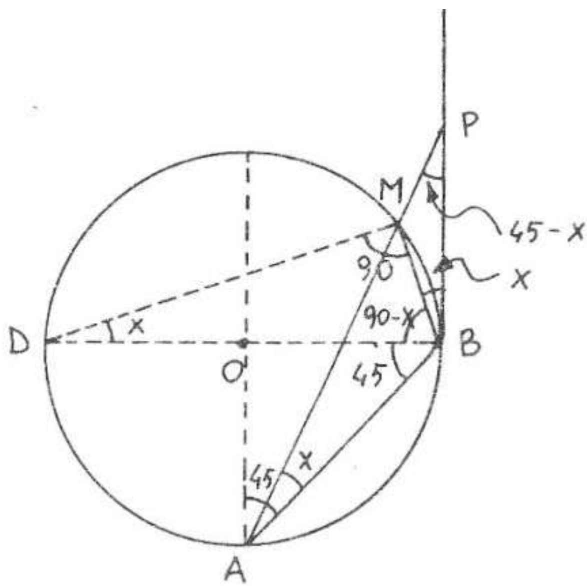
Settembre 1949, primo problema

In una data circonferenza di centro O, la corda AB è il lato del quadrato inscritto. Condotta nel punto B la semiretta tangente alla circonferenza che giace, rispetto alla retta AB, nel semipiano che contiene il centro O, determinare sulla semiretta un punto P tale che si abbia

$$\frac{BM + 2\sqrt{2}\cdot MP}{PB} = k$$

Dove M è l'ulteriore intersezione del segmento AP con la circonferenza e k un numero reale positivo.
N.B. Risolvere il problema per via trigonometrica.
Parte facoltativa:

1) **Condotta in B l'intera tangente alla circonferenza e detto ABCD il quadrato inscritto, determinare le parti della tangente descritte dal punto P quando il punto M percorre gli archi BC, CD, DA, AB e i limiti di k al tendere di M ai vertici B, C, D, A.**
2) **Risolvere il problema per via geometrica.**



Indicando con r il raggio della circonferenza, è

$$AB = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$$

Poniamo $MAB = x$ con $0 < x < 45°$

Per il teorema della corda è

$$\boxed{MB = 2r\,\text{sen}\,x}$$

L'angolo MDB insiste sulla stessa corda dell'angolo MAB e perciò è anche $MDB = x$.

Il triangolo MDB è rettangolo e quindi

$$DBM = 90 - x$$

Ma DBP è retto per costruzione, e perciò $MBP = x$.

Nel triangolo ABP risulta dunque

$$PAB = x$$

$$ABP = 45 + (90 - x) + x = 135$$

E, per differenza,

$$APB = 180 - 135 - x = 45 - x$$

Applichiamo ora il teorema dei seni al triangolo ABP

$$AB : \text{sen}(45 - x) = PB : \text{sen}\,x$$

$$PB = \frac{AB\,\text{sen}\,x}{\text{sen}(45 - x)}$$

$$\boxed{PB = \frac{2r\,\text{sen}\,x}{\cos x - \text{sen}\,x}}$$

E il teorema dei seni al triangolo MBP

$$MP : \text{sen}\,x = MB : \text{sen}(45 - x)$$

$$MP = \frac{MB\,\text{sen}\,x}{\text{sen}(45 - x)}$$

$$\boxed{MP = \frac{2r\sqrt{2}\,\text{sen}^2 x}{\cos x - \text{sen}\,x}}$$

Siamo ora in grado di applicare la relazione del problema

$$\frac{MB+2\sqrt{2}\cdot MP}{PB}=k \qquad (\text{con}\, k>0)$$

Sviluppando e semplificando, si ottiene

$$\boxed{\begin{array}{ll}(1) & 3\,\text{sen}\,x+\cos x\mu_X-k=0 \\ & 0<x<45^\circ \qquad k>0\end{array}}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. Associamola alla relazione fondamentale della trigonometria, e poniamo

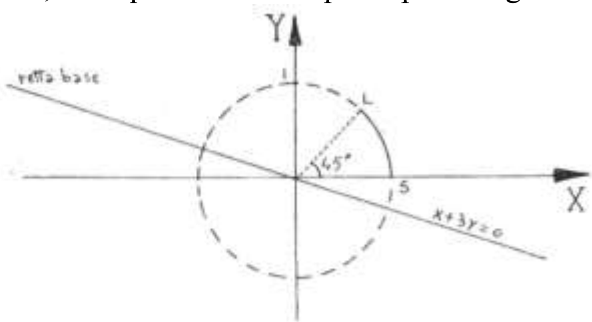
$$\begin{cases}\cos x = X \\ \text{sen}\,x = Y\end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases}3Y+X-k=0 \\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele e una circonferenza con raggio unitario e centro nell'origine.

Di quest'ultima dovremo considerare solo l'arco LS corrispondente ad un angolo compreso fra 0° e 45°. Nel grafico è tracciata anche la "retta base" del fascio, cioè quella retta che passa per l'origine.



$$S\equiv(1;0) \qquad\qquad L\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calcoliamo per quali valori di k la retta generica del fascio passa per S ed L, imponendo al fascio di passare per tali punti

$$S \;\to\; 1-k=0 \qquad \to\; k=1$$

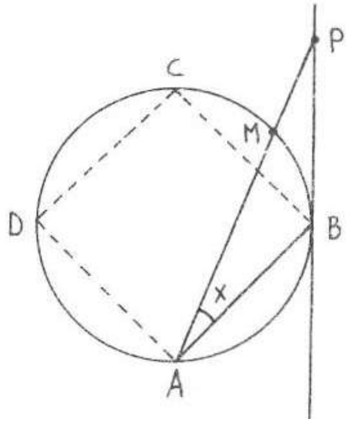
$$L \;\to\; 3\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-k=0 \;\to\; k=2\sqrt{2}$$

Il problema ammette una sola soluzione per

$$\boxed{1 < k < 2\sqrt{2}}$$

Passiamo ora alla parte facoltativa. Dividendo numeratore e denominatore per cos x, si può scrivere

$$PB = \frac{2r\,\text{sen}\,x}{\cos x - \text{sen}\,x} = \frac{2r\,\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}\,x}$$



Inoltre, quando

$$M \equiv B \quad \to \quad x = 0°$$
$$M \equiv C \quad \to \quad x = 45°$$
$$M \equiv D \quad \to \quad x = 90°$$
$$M \equiv A \quad \to \quad x = 135°$$

E quindi, sostituendo nella (1), si ha

$$M \equiv B \quad \to \quad k = 3\,\text{sen}\,0 + \cos 0 \quad \to \quad k = 1$$
$$M \equiv C \quad \to \quad k = 3\,\text{sen}\,45 + \cos 45 \quad \to \quad k = 2\sqrt{2}$$
$$M \equiv D \quad \to \quad k = 3\,\text{sen}\,90 + \cos 90 \quad \to \quad k = 3$$
$$M \equiv A \quad \to \quad k = 3\,\text{sen}\,135 + \cos 135 \quad \to \quad k = \sqrt{2}$$

Settembre 1949, secondo problema

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, dimostrare che fra le parabole con asse parallelo all'asse y, due (e due soltanto) passano per i punti

$$A \equiv \left(0; \frac{1}{4}\right) \qquad B \equiv \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4}\right)$$

E sono tangenti all'asse x.

Scrivere poi le equazioni delle tangenti alle due parabole nel punto A e determinare l'angolo da esse formato. Infine, condotta una retta parallela all'asse x di equazione $y = k$, dette M ed N le intersezioni di essa con una delle due parabole considerate, e fissato un punto P di ordinata $p > 0$, determinare il massimo dell'area del triangolo MNP al variare di k nell'intervallo (0,p), estremi esclusi.

Parte facoltativa:

1) **Scrivere le equazioni delle tangenti alle due parabole nel punto B e determinare l'ampiezza del loro angolo.**
2) **Dimostrare che i punti A, C, C', A', dove C e A' sono le intersezioni con l'asse x rispettivamente delle tangenti in A e in B alla parabola di vertice di ascissa positiva, e C' l'intersezione di quest'ultima tangente con quella condotta in A all'altra parabola, sono vertici di un trapezio isoscele.**

Una parabola generica con asse verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponendo il passaggio per i punti A e B, si ha

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4} = a\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4} - b\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + c \end{cases}$$

Sostituendo $c = \dfrac{1}{4}$ nella seconda equazione e semplificando, avremo

$$(1) \qquad a = \frac{b\left(1+\sqrt{3}\right)+3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

E quindi la parabola generica può essere espressa in funzione del solo parametro b

$$y = \frac{b\left(1+\sqrt{3}\right)+3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}x^2 + bx + \frac{1}{4}$$

Calcoliamo il valore di quest'ultimo coefficiente imponendo la condizione di tangenza con la retta y = 0. Si ottiene

$$\Delta = b^2 - 4\frac{b\left(1+\sqrt{3}\right)+3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Cioè

$$\left(2+\sqrt{3}\right)b^2 - b\left(1+\sqrt{3}\right) - 3 - 2\sqrt{3} = 0$$

Risolvendo si ha

$$b = \frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(5+3\sqrt{3}\right)^2}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)} = \begin{cases} \dfrac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ \dfrac{-2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

Sostituendo ciascuno di questi due valori nella (1) si ottiene rispettivamente

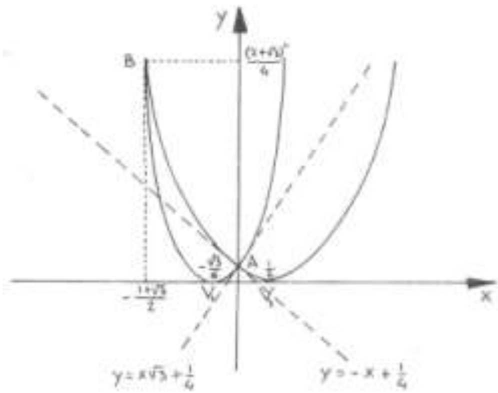
$$a = 3 \qquad\qquad a = 1$$

e perciò le equazioni delle due parabole richieste sono

$$\begin{cases} y = 3x^2 + x\sqrt{3} + \dfrac{1}{4} \\ y = x^2 - x + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Con vertici nei punti

$$V_1 \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} ; 0 \right) \qquad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2} ; 0 \right)$$



Il fascio di rette passanti per A ha equazione

$$y - \frac{1}{4} = mx \qquad \rightarrow \qquad y = mx + \frac{1}{4}$$

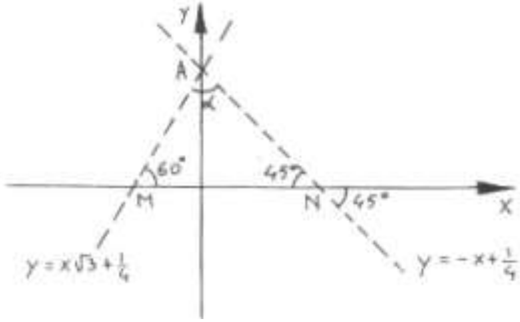
Le derivate delle due parabole sono

$$y' = 6x + \sqrt{3} \qquad\qquad y' = 2x - 1$$

Ponendo in esse x = 0, si ottengono i coefficienti angolari delle due rette tangenti in A, che sono $m = \sqrt{3}$ e $m = -1$. Quindi

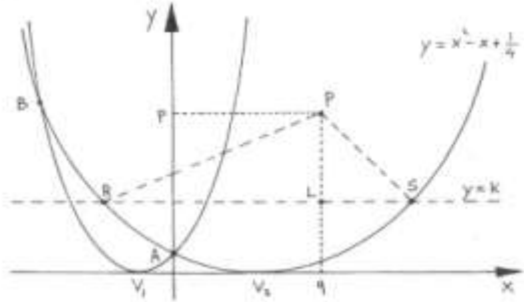
$$\boxed{y = x\sqrt{3} + \frac{1}{4} \qquad\qquad y = -x + \frac{1}{4}}$$

Sono le due rette tangenti:



Osservando la figura e il triangolo AMN, si ricava immediatamente che

$$\alpha = 180 - 60 - 45 = 75$$



Tracciamo la retta y = k e il punto P di coordinate (p;q) con p > 0.

La superficie del triangolo RSP non dipende ovviamente dal parametro q perché fissando un qualsiasi valore per p, al variare di q si ottengono tutti triangoli con stessa base e stessa altezza, quindi con la stessa superficie.

Calcoliamo le coordinate di R ed S risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - x + \dfrac{1}{4} \\ y = k \end{cases}$$

Si ha

$$R \equiv \left(\frac{1-\sqrt{k}}{2} ; k \right) \qquad\qquad S \equiv \left(\frac{1+\sqrt{k}}{2} ; k \right)$$

La base e l'altezza del triangolo sono allora

$$\begin{cases} RS = \dfrac{1+\sqrt{k}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{k}}{2} = k \\ PL = p - k \end{cases}$$

E la sua superficie è

$$S = \frac{RS \cdot PL}{2} = \frac{\sqrt{k}\left(p-k\right)}{2} = \frac{1}{2}p\sqrt{k} - \frac{1}{2}\sqrt{k^3} = \frac{1}{2}pk^{1/2} - \frac{1}{2}k^{3/2}$$

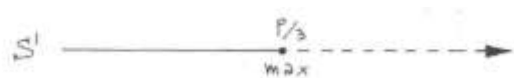
Calcoliamo la derivata

$$S' = \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}k^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}\frac{3}{2}k^{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{4}pk^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}k^{\frac{1}{2}}$$

Cioè

$$S' = \frac{p}{4\sqrt{k}} - \frac{3\sqrt{k}}{4} = \frac{p-3k}{4\sqrt{k}}$$

Studiamone il segno: la funzione è reale solo per $k \geq 0$ e sotto tale condizione il denominatore è positivo. Basta quindi studiare il segno del numeratore, che fornisce



Il triangolo PRS ha dunque area massima per

$$\boxed{k = \frac{p}{3}}$$

Passiamo ora alla parte facoltativa. Il fascio di rette passanti per B è

$$y = m\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4}$$

Le derivate delle due parabole calcolate nel punto di ascissa $x = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ forniscono

$$\begin{cases} f'\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = -3-2\sqrt{3} \quad \leftarrow \quad \text{coeff.angolare prima tangente} \\ f'\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = -2-\sqrt{3} \quad \leftarrow \quad \text{coeff.angolare seconda tangente} \end{cases}$$

Sostituendo e semplificando si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} y = x\left(-3-2\sqrt{3}\right)-\dfrac{11+6\sqrt{3}}{4} \\ y = x\left(-2-\sqrt{3}\right)-\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4} \end{cases}}$$

Che sono le due rette tangenti cercate. Per calcolare l'angolo da esse formato applichiamo la formula

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

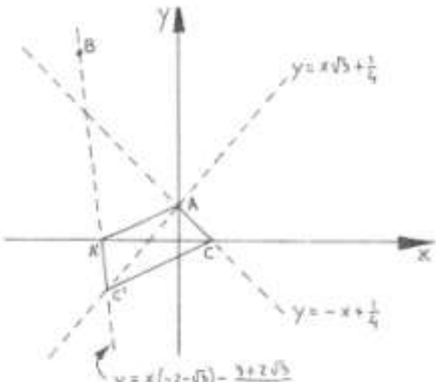
Dove m_1 e m_2 sono i coefficienti angolari delle due rette. Si ha

$$\tan\alpha = \frac{\left(-3-2\sqrt{3}\right)-\left(-2-\sqrt{3}\right)}{1+\left(-3-2\sqrt{3}\right)\left(-2-\sqrt{3}\right)} = \frac{4-3\sqrt{3}}{11}$$

E perciò

$$\boxed{\alpha = \arctan\frac{4-3\sqrt{3}}{11}}$$

Tracciamo infine il quadrilatero ACC'A'



Tralasciando per brevità i calcoli, i quattro vertici hanno coordinate

$$A \equiv \left(0; \frac{1}{4}\right) \qquad C \equiv \left(\frac{1}{4}; 0\right)$$

$$A' \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right) \qquad C' \equiv \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{8}; -\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right)$$

I coefficienti angolari delle rette passanti per AA’ e CC’ risultano entrambi

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E quindi il quadrilatero è un trapezio. Inoltre risulta

$$AC = A'C' = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

E perciò il trapezio è isoscele.