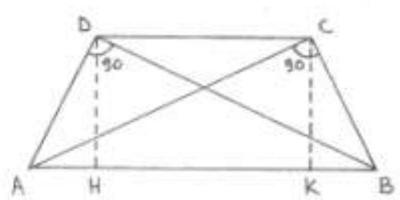
Luglio 1950, primo problema

Risolvere un trapezio isoscele convesso avente le diagonali perpendicolari ai lati obliqui, sapendo che la somma dei quadrati delle misure dei suoi lati è m^2 e la lunghezza di una diagonale è d. Discussione.



$AC = BD = d$ poniamo $AB = x$

E applichiamo il primo teorema di Euclide al triangolo ADB. Si ha

$$DB^2 = AB \cdot HB$$

$$HB = \frac{DB^2}{AB} = \frac{d^2}{x}$$

Ne deriva che

$$AH = AB - HB = x - \frac{d^2}{x} = \frac{x^2 - d^2}{x}$$

$$DC = AB - 2AH = x - 2\frac{x^2 - d^2}{x} = \frac{2d^2 - x^2}{x}$$

$$AB = \sqrt{x^2 - d^2}$$

Applichiamo ora la relazione del problema

$$AB^2 + DC^2 + 2AD^2 = m^2$$

$$x^2 + \left(\frac{2d^2 - x^2}{x}\right)^2 + 2x^2 - 2d^2 = m^2$$

Poiché $x \neq 0$ si può eliminare il denominatore: sviluppando e semplificando si ha

$$\boxed{(1) \qquad 4x^4 - x^2\left(6d^2 + m^2\right) + 4d^4 = 0}$$

Che è l'equazione parametrica da discutere.

I valori estremi che può assumere la variabile x si determinano nel modo seguente.
Le diagonali del trapezio hanno lunghezza fissa d, e sono perpendicolari ai lati obliqui. La x assume valore minimo quando il trapezio è talmente "schiacciato" (D = A e C = B) da degenerare in un segmento. In tal caso si ha

$$x = d$$

La x assume invece valore massimo quando il trapezio aumenta di altezza e la base minore diviene un punto (D = C). In tal caso il trapezio si trasforma in un triangolo rettangolo isoscele e si ha

$$x = d\sqrt{2}$$

ipotenusa del triangolo suddetto. Quindi

$$\boxed{(2) \qquad d < x \leq d\sqrt{2}}$$

Eseguiamo la discussione geometrica ponendo

$$\begin{cases} x^2 = X \\ x^4 = Y \end{cases}$$

Dalla (1) si ottiene

$$\begin{cases} Y = X^2 \\ 4Y - X\left(6d^2 + m^2\right) + 4d^4 = 0 \end{cases}$$

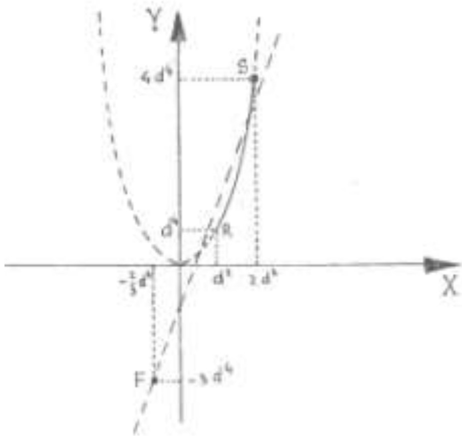
Cioè una parabola di cui dovremo considerare soltanto l'arco con

$$\boxed{(3) \qquad d^2 < X \leq 2d^2}$$

A causa della limitazione (2), e un fascio di rette con centro nel punto

$$F \equiv \left(-\frac{2}{3}d^2; -3d^4 \right)$$

Ottenuto, al solito, dando al parametro m^2 due valori arbitrari (per esempio 0 e $6d^2$) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute.



Si ha la tangenza fra retta generica del fascio e l'arco di parabola RS quando $m^2 = 2d^2$ cioè, come si vedrà, quando la retta del fascio passa per R.
Vediamo infatti per quale valore del parametro la retta passa per R, imponendo al fascio di passare per tale punto

$$4d^4 - 2d^2\left(6d^2 + m^2\right) + 4d^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = 2d^2$$

Che coincide appunto con il valore della tangenza.
Imponendo il passaggio per S, si trova

$$16d^4 - 2d^2\left(6d^2 + m^2\right) + 4d^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = 4d^2$$

Poiché la retta del fascio ha sempre una sola intersezione con l'arco RS di parabola, il punto R è escluso a causa della limitazione (1), si avrà sempre una sola soluzione per

$$2d^2 < m^2 \leq 4d^2$$

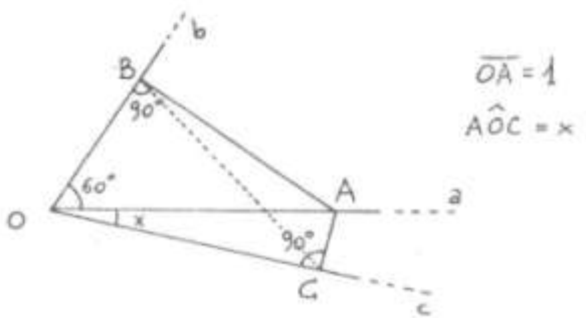
Cioè, essendo sia m che d sempre positivi

$$d\sqrt{2} < m \leq 2d$$

Luglio 1950, secondo problema

Le semirette a, b, c di origine O sono complanari. La semiretta a forma con b un angolo di 60° ed è interna all'angolo convesso limitato dalle altre due ed è tale che la proiezione ortogonale di un suo punto qualunque sulla retta cui appartiene c, cade sulla semiretta c. Fissato sulla semiretta a il segmento unitario OA, siano B e C rispettivamente le proiezioni di A su b e c.
Determinare l'ampiezza x dell'angolo delle semirette a, c, sapendo che il triangolo BOC è equivalente ad un triangolo di base OA e altezza uguale ad un segmento di lunghezza nota k.
E' facoltativa la risoluzione geometrica.

Ricordiamo che un angolo è convesso se la sua ampiezza è compresa fra 0° e 180°.



L'angolo formato dalle rette b e c deve quindi essere minore di un angolo piatto.
Inoltre la proiezione di A su c deve sempre cadere sulla semiretta c, e non sul suo prolungamento oltre O.
Perciò

$$0 < x \leq 90$$

Nel triangolo OCA si ha

$$\frac{OC}{OA} = \cos x \quad \rightarrow \quad OC = \cos x$$

E, nel triangolo OBA

$$\frac{OB}{OA}=\cos 60 \quad \to \quad OB=\frac{1}{2}$$

La superficie del triangolo OBC è dunque

$$S_{OBC}=\frac{OB\cdot OC\cdot \operatorname{sen}\left(60+x\right)}{2}=\frac{1}{2}\cos x \operatorname{sen}\left(60+x\right)\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x}{8}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$S_{OBC}=\frac{1\cdot k}{2} \quad \to \quad \frac{\sqrt{3}\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x}{8}=\frac{k}{2}$$

E perciò

$$\boxed{\begin{array}{c}(1) \quad \sqrt{3}\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x=4k \\ 0<x\le 90 \qquad k>0\end{array}}$$

Che è l’equazione parametrica da discutere.
Dalle formule di duplicazione si ricava

$$\begin{cases}\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x \quad \to \quad \operatorname{sen} x\cos x=\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1 \quad \to \quad \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}\end{cases}$$

Sostituendo nella (1) si ha

$$\sqrt{3}\,\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}=4k$$

Cioè

$$\sqrt{3}\cos 2x+\operatorname{sen} 2x=8k-\sqrt{3}$$

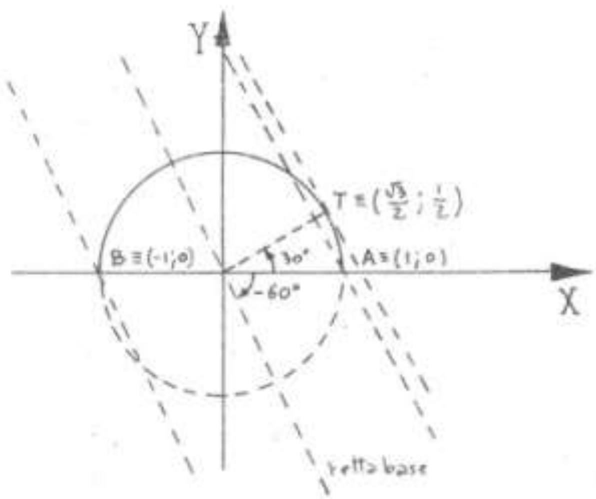
Ponendo

$$\begin{cases}\cos 2x=X \\ \operatorname{sen} 2x=Y\end{cases}$$

E associando all’equazione la prima relazione fondamentale della trigonometria, si ottiene

$$\begin{cases}X\sqrt{3}+Y=8k-\sqrt{3} \\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\sqrt{3}$ e una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, di cui dovremo considerare solo la semicirconferenza superiore perché $0 < x \le 180$.



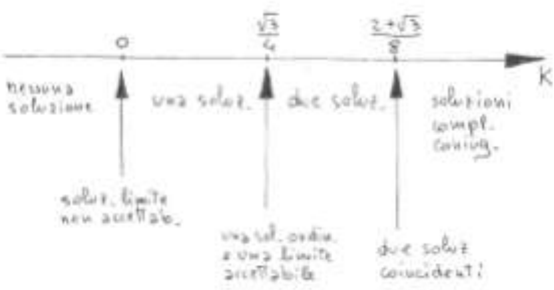
La retta base è inclinata di 60 gradi verso il basso (perché $m = -\sqrt{3}$), e perciò

$$T \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Imponendo il passaggio delle rette del fascio per B, A, T, si ha

$$\begin{cases} B \quad \rightarrow \quad -\sqrt{3} + 0 = 8k - \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad k = 0 \\ A \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} + 0 = 8k - \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ T \quad \rightarrow \quad \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 8k - \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

Pertanto


0
√3/4
(2+√3)/8
K
nessuna soluzione
una soluz.
due soluz.
soluzioni compl. coniug.
soluz. limite non accettab.
una sol. ordin. e una limite accettabile
due soluz coincidenti