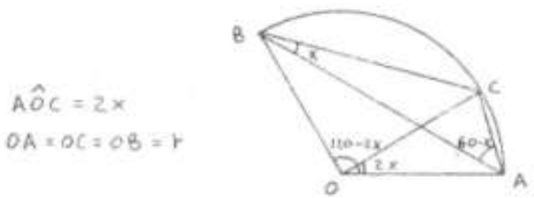
Settembre 1950, primo problema

Dato un settore circolare in cui l'angolo al centro $\widehat{AOB}$ è di 120° ed il raggio è di lunghezza r, determinare l'ampiezza 2x dell'angolo $\widehat{AOC}$, ove C è un punto dell'arco AB tale che il rapporto fra i perimetri dei triangoli AOC e COB sia $\frac{1}{k}$.

Discussione.



L'angolo $\widehat{ABC} = x$ perché angolo alla circonferenza che insiste sull'angolo al centro $\widehat{AOC} = 2x$.

Per la stessa ragione, poiché $\widehat{BOC} = 120 - 2x$, sarà $\widehat{BAC} = 60 - x$.

Per il teorema della corda è

$$AC = 2r \operatorname{sen} x$$

$$BC = 2r \operatorname{sen}(60 - x)$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{OA + OC + AC}{OC + OB + BC} = \frac{1}{k}$$

Cioè

$$\frac{2r + 2r \operatorname{sen} x}{2r + 2r \operatorname{sen}(60 - x)} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen}(60 - x)} = \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sen}x(1+2k)-\sqrt{3}\cos x=2-2k\\ 0\le x\le 60\quad k>0\end{array}}$$

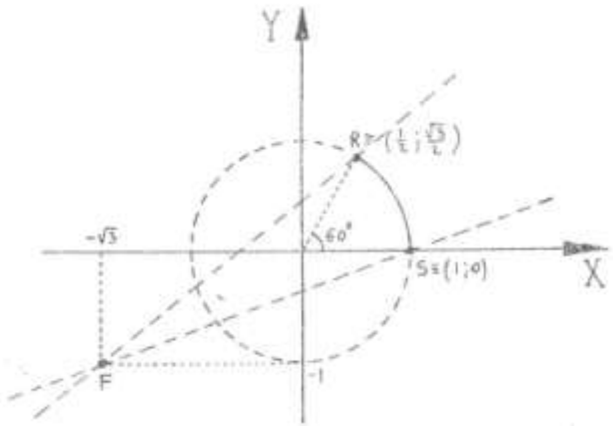
Eseguiamo la discussione geometrica ponendo

$$\begin{cases}\cos x=X\\ \operatorname{sen}x=Y\end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases}Y(1+2k)-X\sqrt{3}=2-2k\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro nel punto $F\equiv\left(-\sqrt{3}:-1\right)$ e un arco di circonferenza unitaria con centro nell'origine e ampiezza di 60 gradi.



La retta del fascio non può mai essere tangente all'arco RS di circonferenza.

Imponiamo il passaggio per R e per S

$$\begin{cases}R\ \to\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+2k)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2-2k\ \to\ k=2\left(2-\sqrt{3}\right)\\ S\ \to\ 0-\sqrt{3}=2-2k\ \to\ k=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Quindi il problema ha sempre una soluzione per

$$\boxed{2\left(2-\sqrt{3}\right)\le k\le\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

Confrontando fra loro i due secondi membri, si ottiene

$$x^2 - max - a^2 - ma^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \left\langle \begin{array}{l} ma + a \\ -a \end{array} \right.$$

E cioè

$$A \equiv (-a;0) \qquad C \equiv \left(ma + a; m^2a + 2am\right)$$

La base e l'altezza del triangolo ACD sono perciò

$$\begin{cases} AD = AO + OD = am + 2a \\ CD = m^2a + 2am \end{cases}$$

Applicando la relazione del problema, si ha

$$\frac{AD \cdot CD}{2} = ha^2m^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{(1) \qquad m^2 - 2m(h-2) + 4 = 0}$$

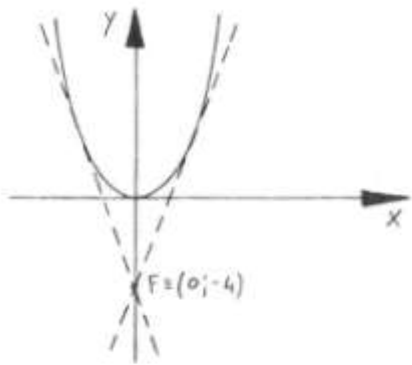
Che è l'equazione parametrica da discutere, senza alcuna limitazione per la variabile m e con h > 0. Poniamo

$$\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases} y = x(2h-4) - 4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro $F \equiv (0;-4)$ determinato assegnando ad h due valori arbitrari (per esempio h = 2 e h = 0) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute. E una parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto



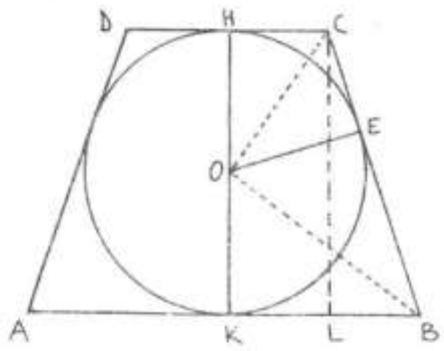
La retta del fascio è tangente o secante la parabola a seconda che

$$\Delta = \left(2h - 4\right)^2 - 16 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{0 < h \leq 4}$$

Entro tale intervallo il problema ammette sempre due soluzioni perché vi sono due intersezioni fra retta del fascio e parabola.
Passiamo ora alla determinazione dell'area del triangolo ide BCD (che risulterà espressa in funzione della variabile m)

Settembre 1950, secondo problema

Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio. Determinare i lati del trapezio e il raggio del cerchio sapendo che il trapezio è equivalente al quadrato di lato $a\sqrt{2}$, e che il rapporto fra i volumi dei solidi della sfera e del tronco di cono che si ottengono facendo compiere una mezza rotazione al cerchio e al trapezio intorno al diametro perpendicolare alle basi del trapezio, è uguale al numero reale positivo k.
Discutere il problema.



Poniamo

$$\begin{cases} HC = x \\ KB = y \end{cases}$$

Poiché HC = CE e EB = KB, si ha

$$CB = x + y$$
$$LB = y - x$$

E perciò

$$LC = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy}$$

Quindi il raggio della circonferenza è

$$OK = \sqrt{xy}$$

Imponendo la prima relazione del problema si ottiene

$$\frac{AB + DC}{2} \cdot HK = \left(a\sqrt{2}\right)^2$$

$$\boxed{(1) \qquad (x+y)\sqrt{xy} = a^2}$$

Ora, ricordando che il volume del tronco di cono è

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

Dove h è l'altezza del tronco e R ed r i raggi delle due basi, si ha

$$\begin{cases} V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot OH^3 = \frac{4}{3}\pi\sqrt{(xy)^3} = \frac{4}{3}\pi\, xy\sqrt{xy} \\ V_{tronco} = \frac{\pi \cdot HK}{3}\left(KB^2 + HC^2 + KB \cdot HC\right) = \frac{2}{3}\pi\sqrt{xy}\left(x^2 + y^2 + xy\right) \end{cases}$$

Imponendo la seconda relazione del problema, avremo

$$\frac{V_{sfera}}{V_{tronco}} = k \quad \rightarrow \quad \boxed{(2) \quad 2xy = k\left(x^2 + y^2 + xy\right)}$$

Le (1) e (2) costituiscono un sistema simmetrico, che può essere trasformato e ridotto ad un semplice sistema tipo somma e prodotto.

$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{xy} = a^2 \\ 2xy = k\left(x^2 + y^2 + xy\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{a^2}{\sqrt{xy}} \\ 2xy = k(x+y)^2 - kxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ xy(2+k) = k(x+y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ xy(2+k) = k\frac{a^4}{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ x^2y^2 = \frac{ka^4}{2+k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ xy = a^2\sqrt{\frac{k}{2+k}} \end{cases}$$

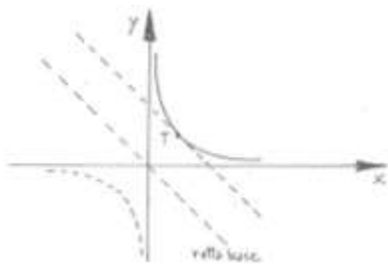
Nell'ultimo passaggio abbiamo tralasciato il doppio segno ± perché i segmenti x ed y debbono essere sempre entrambi positivi. Per la stessa ragione si ha

$$\sqrt{xy} = \sqrt{a^2\sqrt{\frac{k}{2+k}}} = a\sqrt[4]{\frac{k}{2+k}}$$

E quindi sostituendo nella prima equazione del sistema, si ottiene infine

$$(3)\qquad \begin{cases} x+y=a^2\sqrt[4]{\dfrac{2+k}{k}} \\ xy=a^2\sqrt{\dfrac{k}{2+k}} \end{cases} \qquad x>0 \quad y>0 \quad k>0$$

Che rappresenta il sistema da discutere, cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare m = - 1 e una famiglia di iperboli equilatere (del tipo xy = cost con costante positiva).
Dovremo considerare solo i rami di iperbole situati nel primo quadrante, perché deve essere x > 0, y > 0.



Il problema ammetterà sempre due soluzioni simmetriche per quei valori di k per cui la retta del fascio taglia l'arco di iperbole contenuto nel primo quadrante.
Nel sistema (3) ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda. Si ha

$$x^2-ax\sqrt[4]{\frac{2+k}{k}}+a^2\sqrt{\frac{k}{2+k}}=0$$

Troviamo le condizioni di tangenza ponendo Δ = 0

$$\Delta=a^2\sqrt{\frac{2+k}{k}}-4a^2\sqrt{\frac{k}{2+k}}=0$$

Semplificando si trova

$$-15k^2+4k+4=0$$

Quindi il Δ è positivo per

$$-\frac{2}{5}<k<\frac{2}{3}$$

Ma, dovendo essere k > 0 il problema ammette sempre due soluzioni simmetriche per

$$\boxed{0 < k \leq \frac{2}{3}}$$

Con due soluzioni reali e coincidenti per $k = \frac{2}{3}$