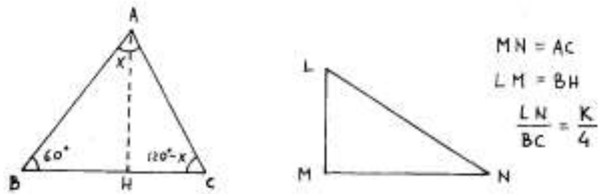
Luglio 1951, primo problema

Nel triangolo ABC l'angolo di vertice B è di 60°. Determinare l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$ **sapendo che è** $\frac{k}{4}$ **la misura, rispetto al lato BC, dell'ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti due segmenti rispettivamente uguali ad AC e ala proiezione BH di BA su BC.**
Discutere i risultati ed esaminare i casi in cui x è uguale a 60°, 30°, 90°. E' facoltativa la discussione grafica.



Riferendoci al primo triangolo esprimiamo AC e BH in funzione di BC.
Per il teorema dei seni è

$$BC : \text{sen}\, x = AC : 60$$

$$\boxed{(1) \quad AC = BC \frac{\sqrt{3}}{2\,\text{sen}\, x}}$$

Nel triangolo rettangolo AHC è inoltre

$$\frac{AH}{AC} = \text{sen}(120 - x) \quad \rightarrow \quad AH = AC\,\text{sen}(120 - x)$$

Cioè, utilizzando la (1),

$$AH = BC \frac{\sqrt{3}\text{sen}(120 - x)}{2\text{sen}\, x} \quad \rightarrow \quad AH = BC \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x}{\text{sen}\, x}$$

Nel triangolo rettangolo AHB è allora

$$\frac{BH}{AH} = \text{ctg}\, 60 \quad \rightarrow \quad BH = \frac{AH}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{(2) \quad BH = BC \frac{\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x}{4\,\text{sen}\, x}}$$

La relazione fornita dal problema

$$\frac{LH}{BC}=\frac{k}{4}$$

Può anche essere scritta nel modo seguente

$$LH=\frac{k}{4}BC \quad \to \quad LH^2=\frac{k^2}{16}BC^2 \quad \to \quad AC^2+BH^2=\frac{k^2}{16}BC^2$$

Sostituiamo le (1) e (2) in quest'ultima espressione

$$BC^2\frac{3}{4\,sen^2x}+BC^2\frac{\left(\sqrt{3}\cos x+sen\,x\right)^2}{16\,sen^2x}=\frac{k^2}{16}BC^2$$

Cioè, semplificando e sotto la condizione sen x ≠ 0,

$$15\cos^2x+2\sqrt{3}\,sen\,x\cos x+\left(13-k^2\right)sen^2x=0$$

Dove la x può variare fra 0° e 120° (perché $A\hat{B}C=60$ e la somma degli angoli interni deve essere 180°).
Conviene allora trasformare l'equazione in funzione di ctg x dividendo tutti i termini per sen^2x. Si ha

$$\boxed{\begin{array}{c}15\,ctg^2x+2\sqrt{3}\,ctg\,x+13-k^2=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}<ctg\,x<\infty \qquad k>o\end{array}}$$

Ponendo

$$\begin{cases}ctg\,x=X\\ k^2=Y\end{cases}$$

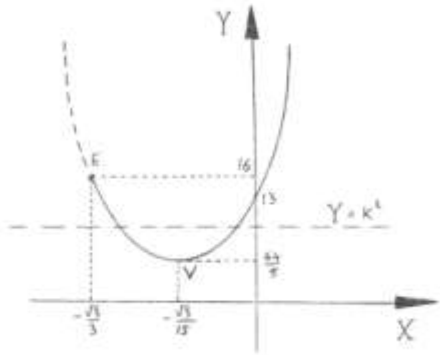
Si ottiene

$$\begin{cases}Y=15X^2+2\sqrt{3}X+13\\ Y=k^2\end{cases}$$

Cioè un arco di parabola con asse verticale, vertice nel punto

$$V\equiv\left(-\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{64}{5}\right)$$

E ascissa compresa fra $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e ∞, e un fascio di rette orizzontali.



Vi sono due soluzioni per

$$\frac{64}{5} \le k^2 < 16 \quad \rightarrow \quad \frac{8\sqrt{5}}{5} \le k < 4$$

E una soluzione per

$$k^2 \ge 16 \quad \rightarrow \quad k \ge 4$$

Infine, per x = 30° è k = 8, per x = 60° è $k = 2\sqrt{5}$, e per x = 90° è $k = \sqrt{13}$.

Luglio 1951, secondo problema

Fissato in un piano un sistema di coordinate ortogonali xOy, si considerino le infinite parabole di equazione

$$\mathbf{y = x^2 + px + q}$$

dipendenti dai due parametri p e q.
Si esprima q per mezzo di p, in maniera che delle anzidette parabole siano considerate soltanto quelle i cui vertici appartengono alla parabola di equazione

$$\mathbf{y = -x^2 - 2x + 2}$$

Si determinino le equazioni delle rette passanti per l'origine O degli assi e tangenti a una delle anzidette parabole e si trovi, in funzione di p, la lunghezza della corda dei punti di contatto.
Quali sono le parabole per cui si ha la massima e la minima corda ?

Si deve imporre che i vertici delle infinite parabole di equazione

$$(1) \qquad y = x^2 + px + q$$

passino tutti per la curva di equazione

$$(2) \qquad y = -x^2 - 2x + 2$$

Il vertice generico della (1) ha coordinate

$$\begin{cases} V_x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{p}{2} \\ V_y = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{4q - p^2}{4} \end{cases}$$

Imponiamo che tali coordinate appartengano alla (2)

$$\frac{4q - p^2}{4} = -\frac{p^2}{4} + p + 2$$

Semplificando si ottiene

$$\boxed{q = p + 2}$$

Che è la relazione fra p e q richiesta dal problema. Quindi la (1) può ora essere scritta in funzione di un solo parametro

$$y = x^2 + px + p + 2$$

Mettiamo a sistema questa equazione con la retta generica $y = mx$ passante per l'origine e imponiamo la conizione di tangenza

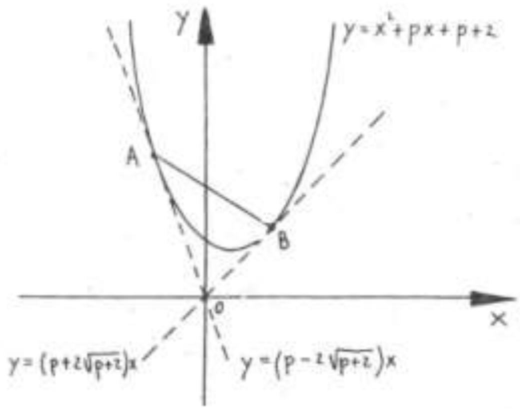
$$\begin{cases} y = x^2 + px + p + 2 \\ y = mx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + x(p-m) + p + 2 = 0$$

$$\Delta = (p-m)^2 - 4(p+2) = 0$$

$$m^2 - 2pm + p^2 - 4p - 8 = 0$$

$$m = p \pm 2\sqrt{p+2}$$

Le rette passanti per l'origine e tangenti alla famiglia di parabole sono allora



Calcoliamo le coordinate dei punti di contatto A e B

$$\begin{cases} y = x^2 + px + p + 2 \\ y = \left(p \pm 2\sqrt{p+2}\right)x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(p \pm 2\sqrt{p+2}\right)x = x^2 + px + p + 2$$

$$x^2 \mp 2x\sqrt{p+2} + p + 2 = 0$$

$$\begin{cases} A \equiv \left(-\sqrt{p+2}; p\sqrt{p+2} + 2(p+2)\right) \\ B \equiv \left(\sqrt{p+2}; -p\sqrt{p+2} + 2(p+2)\right) \end{cases}$$

La lunghezza della corda è quindi

$$\boxed{AB = 2\sqrt{(p+2)\left(1+p^2\right)}}$$

Determiniamo infine per quali valori del parametro tale funzione ammette un massimo e un minimo. La derivata è (usando le più consuete variabili x e y)

$$y = 2\sqrt{(x+2)(1+x^2)} \quad \rightarrow \quad y = 2\sqrt{x^3+2x^2+x+2}$$

$$y' = \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{(x+2)(1+x^2)}}$$

Studiamone il segno. Il radicando è positivo per x > –2 e perciò la funzione assume valori reali per $x \geq -2$.
Sotto tale condizione il denominatore è sempre positivo, e quindi è sufficiente studiare il segno del solo numeratore. Si ha

La corda AB ha un massimo per $\boxed{p = -1}$

E un minimo per $\boxed{p = -\frac{1}{3}}$.