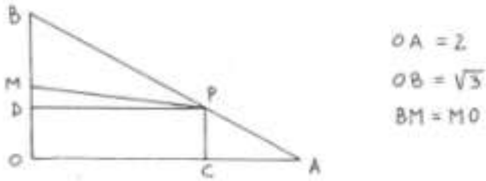
Settembre 1951, primo problema

Il triangolo rettangolo AOB ha i cateti OA, OB di lunghezza 2 e $\sqrt{3}$ rispettivamente. Determinare sull'ipotenusa AB un punto P in modo che sia k la somma della sua distanza dal cateto AO e del doppio della sua distanza dal punto medio M del cateto OB. Discussione. E' facoltativa la discussione geometrica.



Poniamo $CA = x$ con $0 \le x \le 2$.
Risulta allora OC = 2 – x.
I triangoli BOA e PCA sono simili e perciò

$$BO : OA = PC : CA \quad \rightarrow \quad PC = \frac{BO \cdot CA}{OA} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Inoltre

$$MD = MO - PC = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\frac{1-x}{2}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo MDP

$$MP = \sqrt{3\frac{(1-x)^2}{4} + (2-x)^2} = \frac{\sqrt{7x^2 - 22x + 19}}{2}$$

Dalla relazione del problema si ottiene

$$PC + 2\ MP = k$$

$$(1) \qquad x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7x^2 - 22x + 19}}{2} = k$$

Che è l'equazione parametrica da discutere. Ponendo

$$(2) \qquad y = \sqrt{7x^2 - 22x + 19}$$

Sostituendo la (2) nella (1) e quadrando i due membri della (2) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + k \\ 7x^2 - y^2 - 22x + 19 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, mentre la seconda equazione è una iperbole.

Apriamo una breve parentesi per ricordare che una conica generica ha equazione

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Il tipo di conica è determinato dal segno del discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \to \begin{cases} > 0 & \text{iperbole} \\ = 0 & \text{parabola} \\ < 0 & \text{ellisse (o crf)} \end{cases}$$

Per le coniche a centro (cioè tutte tranne le parabole), il centro di simmetria ha coordinate

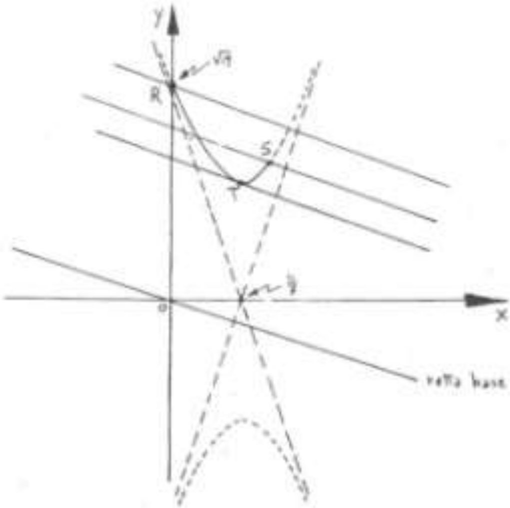
$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2dc - be}{\Delta} \\ y_0 = \dfrac{2ae - bd}{\Delta} \end{cases}$$

Per le iperboli i coefficienti angolari degli asintoti si ottengono uguagliando a zero i soli termini di secondo grado dell'equazione della conica, fattorizzando l'uguaglianza così ottenuta, e considerando tali fattori come rette parallele agli asintoti.

Chiusa questa parentesi sulla teoria generale delle coniche, determiniamo gli elementi caratteristici della nostra conica.

Essendo $\Delta = 28 > 0$ essa è una iperbole. Il centro di simmetria ha coordinate

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{11}{7} \\ y_0 = 0 \end{cases}$$



L'iperbole non taglia mai l'asse x, ma taglia l'asse y in $\pm\sqrt{19}$.
Di essa dobbiamo prendere in considerazione solo l'arco RS con

$$0 \le x \le 2 \qquad y \ge 0 \quad \text{(perché è un radicale)}$$

Si ha

$$R \equiv \left(0; \sqrt{19}\right) \qquad S \equiv \left(2; \sqrt{3}\right)$$

I coefficienti angolari degli asintoti (detti anche direzioni asintotiche), sono

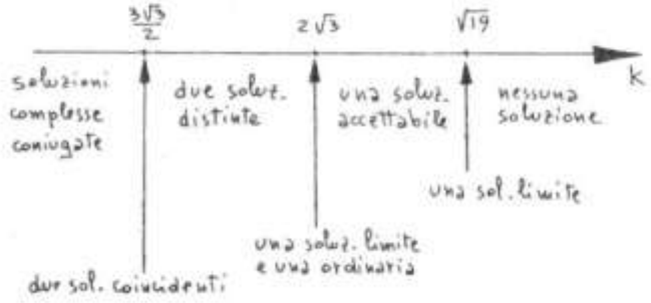
$$7x^2 - y^2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \left(x\sqrt{7} - y\right)\left(x\sqrt{7} + y\right) = 0$$

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{7}$$

Applicando la condizione di tangenza fra fascio di rette e iperbole, si trova

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

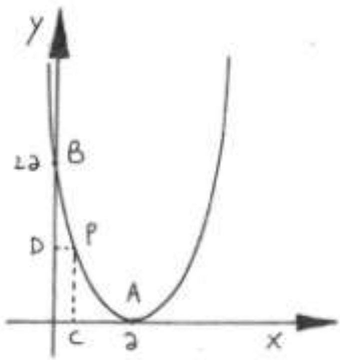
E quindi al variare di k avremo



3√3/2
2√3
√19
k
soluzioni complesse coniugate
due soluz. distinte
una soluz. accettabile
nessuna soluzione
una sol. limite
una soluz. limite e una ordinaria
due sol. coincidenti

Settembre 1951, secondo problema

In un piano su cui è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy sono stati dati i due punti A = (a;0) e B = (0;2a). Scrivere l'equazione della parabola di vertice A, tangente in A all'asse delle x e passante per B.
Trovare i punti P sull'arco AB di parabola, le cui distanze dagli assi coordinati abbiano per somma un segmento di lunghezza ka.
E' facoltativo determinare geometricamente i punti P.



L'equazione generica della parabola è

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Dove abbiamo usato $\alpha\beta\gamma$ al posto di abc per evitare confusione con le coordinate dei punti A e B.
Imponiamo il passaggio della parabola per tali punti, in modo da eliminare due dei tre parametri

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0 \\ \gamma = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta a + 2a = 0 \\ \gamma = 2a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = -2 - \alpha a \\ \gamma = 2a \end{cases}$$

Perciò l'equazione della parabola diviene

$$y = \alpha x^2 - (2 + \alpha a)x + 2a$$

Per determinare il valore dell'ultimo parametro α, imponiamo la tangenza con l'asse x (di equazione y = 0)

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 - (2+\alpha a)x + 2a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha x^2 - (2+\alpha a)x + 2a = 0$$

$$\Delta = (2+\alpha a)^2 - 8\alpha a = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{a}$$

Quindi la parabola richiesta ha equazione

$$\boxed{y = \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a}$$

Le coordinate di P sono

$$P \equiv \left(x; \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a \right)$$

Applichiamo la relazione del problema

$$PD + PC = ka \quad \rightarrow \quad x + \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a = ka$$

Cioè

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x^2 - 3ax + 2a^2 - ka^2 = 0 \\ 0 \le x \le a \quad (k > 0,\ a > 0) \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo $ka^2 = y$. Si ha

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3ax + 2a^2 \\ y = ka^2 \end{cases}$$

Cioè una parabola con vertice nel punto

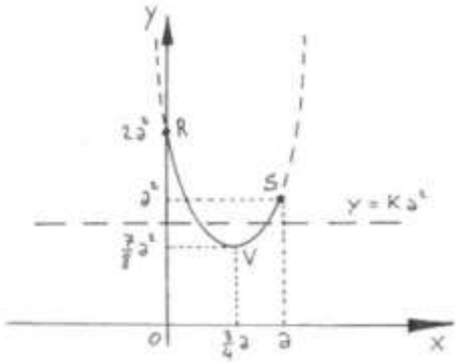
$$V \equiv \left(\frac{3}{4}a; \frac{7}{8}a^2 \right)$$

Di cui dobbiamo considerare solo l'arco RS, dove

$$R \equiv (0; 2a^2) \qquad S \equiv (a; a^2)$$

E un fascio di rette orizzontali.

Determiniamo per quali valori di k la retta generica del fascio passa per V, R, S.



$$V \rightarrow \frac{7}{8}a^2 = ka^2 \rightarrow k = \frac{7}{8}$$

$$S \rightarrow a^2 = ka^2 \rightarrow k = 1$$

$$R \rightarrow 2a^2 = ka^2 \rightarrow k = 2$$

Al variare di k si hanno quindi i risultati seguenti