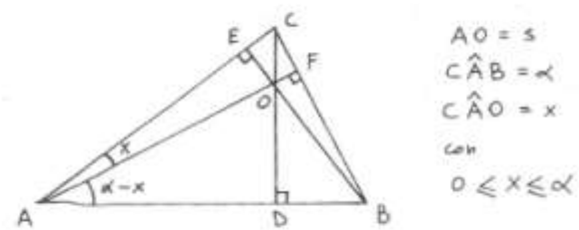
Luglio 1952, primo problema

Il punto O è l'ortocentro del triangolo ABC del quale sono assegnati l'angolo $\widehat{BAC}$ **di ampiezza α, il segmento AO di lunghezza s. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo** $\widehat{CAO}$ **, si esprimano per mezzo di α, s, x le lunghezze dei tre lati del triangolo e quelle dei segmenti OB e OC-**
Supposto che l'angolo α abbia il coseno uguale a 1/3, si determini l'angolo x in modo che si abbia

$$2\ OB + 3\ OC = k\ BC$$

Essendo k un numero reale positivo dato. Nella discussione il candidato può limitarsi a considerare il solo caso del triangolo ABC acutangolo.
E' facoltativa la discussione geometrica.



O è l'ortocentro, cioè il punto d'incontro delle tre altezze. Nel triangolo AEO si ha

$$\frac{AE}{AO} = \cos x \qquad \rightarrow \qquad AE = s \cdot \cos x$$

Nel triangolo AEB

$$\frac{AE}{AB} = \cos\alpha \qquad \rightarrow \qquad AB = \frac{AE}{\cos\alpha} = s\frac{\cos x}{\cos\alpha}$$

Nel triangolo AOD

$$\frac{AD}{AC} = \cos(\alpha - x) \qquad \rightarrow \qquad AD = s \cdot \cos(\alpha - x)$$

Nel triangolo ACD

$$\frac{AD}{AC}=\cos\alpha \qquad \to \qquad AC=\frac{AD}{\cos\alpha}=s\frac{\cos(\alpha-x)}{\cos\alpha}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot al triangolo ABC, per calcolare BC

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cos\alpha}= \ .... =s\cdot\tan\alpha$$

Passiamo al calcolo di OB. Nel triangolo AEB è

$$\frac{EB}{AB}=\operatorname{sen}\alpha \quad \to \quad EB=AB\operatorname{sen}\alpha=s\cdot\cos x\tan\alpha$$

Nel triangolo AEO

$$\frac{EO}{AO}=\operatorname{sen}x \quad \to \quad EO=AO\operatorname{sen}x=s\cdot\operatorname{sen}x$$

E perciò

$$\boxed{OB=EB-EO=s(\cos x\tan\alpha-\operatorname{sen}x)}$$

Determiniamo infine OC. Nel triangolo ACD è

$$\frac{CD}{AC}=\operatorname{sen}\alpha \quad \to \quad CD=AC\operatorname{sen}\alpha=s\cdot\cos(\alpha-x)\tan\alpha$$

Nel triangolo AOD

$$\frac{OD}{OA}=\operatorname{sen}(\alpha-x) \quad \to \quad OD=OA\operatorname{sen}(\alpha-x)=s\cdot\operatorname{sen}(\alpha-x)$$

E perciò

$$\boxed{OC=CD-OD=s\left[\cos(\alpha-x)\tan\alpha-\operatorname{sen}(\alpha-x)\right]}$$

Poniamo ora $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ e calcoliamo i corrispondenti valori di OB, OC, BC. Risulta

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Omettendo i calcoli si ottiene

$$\begin{cases} OB=s\left(2\sqrt{2}\cos x-\operatorname{sen}x\right) \\ OC=3s\cdot\operatorname{sen}x \\ BC=2s\sqrt{2} \end{cases}$$

Imponiamo ora la relazione del problema

$$2 \cdot OB + 3 \cdot OC = k \cdot BC$$

Sostituendo e semplificando

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & 7 \operatorname{sen} x + 4\sqrt{2} \cos x = 2k\sqrt{2} \\ & 0 \le x \le \arccos \frac{1}{3} \qquad k > 0 \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \operatorname{sen} x = Y \end{cases}$$

E associando la (1) con la prima relazione fondamentale della trigonometria. Si ottiene

$$\begin{cases} Y = -\frac{4\sqrt{2}}{7} X + \frac{2k\sqrt{2}}{7} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ e una circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario, di cui dovremo considerare solo l'arco RS.
In cui

$$R \equiv \left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \qquad S \equiv (1; 0)$$

Calcoliamo per quali valori di k la retta del fascio passa per S e R, imponendo al fascio di passare per tali punti.

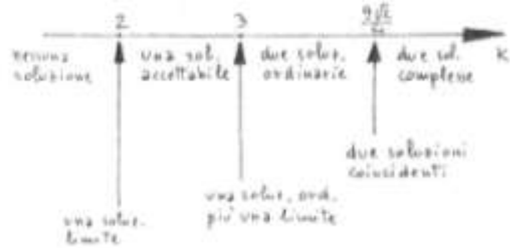
$$S \quad \rightarrow \quad 0 = -\frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{2k\sqrt{2}}{7} \qquad \rightarrow \quad k = 2$$

$$R \quad \rightarrow \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2k\sqrt{2}}{7} \quad \rightarrow \quad k = 3$$

Calcoliamo infine per quale valore di k si ha la tangenza in T.

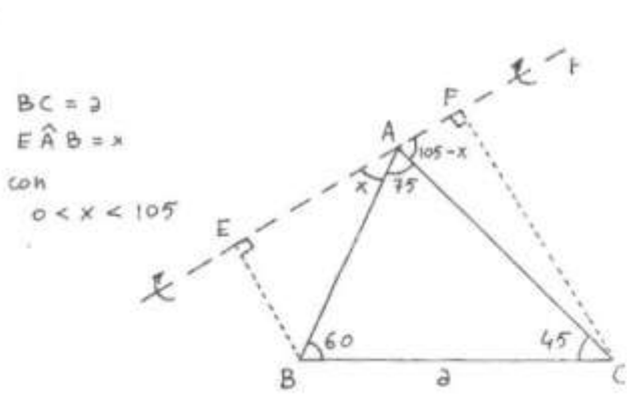
$$\Delta = (16k)^2 - 81(8k^2 - 49) = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Quindi al variare di k si avrà



Luglio 1952, secondo problema

È dato il triangolo ABC del quale si conoscono: il lato BC di lunghezza a e gli angoli di vertici B e C di ampiezza 60° e 45° rispettivamente. Condotta per il vertice A una retta r non secante il triangolo, si consideri il solido ottenuto mediante una rotazione completa del triangolo attorno ad r.
Si trovi il volume V del solido in funzione dell'angolo x che una delle semirette di r di origine A, forma con il lato AB; indi si verifichi l'esattezza dell'espressione di V considerando qualche posizione particolarmente notevole della retta r (per esempio r parallela a BC).
Per quale valore di x il volume V assume il valore massimo o minimo ?
In questi casi estremi, qual è l'angolo che la retta r forma con la mediana AM relativa al lato BC ?



Il volume del solido generato dalla rotazione di ABC attorno ad r, è un tronco di cono (con altezza EF e raggi di base EB e FC) al quale si deve togliere il volume del cono con raggio di base EB e altezza EA, e del cono con raggio di base FC e altezza AF.
Occorre quindi determinare i seguenti segmenti: EA, AF, EB, FC. Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC, si trova

$$BC : \text{sen}\,75 = AB : \text{sen}\,45 \quad \to \quad AB = a\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$BC : \text{sen}\,75 = AC : \text{sen}\,60 \quad \to \quad AC = \frac{a\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Eliminando i calcoli (piuttosto laboriosi) e ricordando che

$$\text{sen}\,105 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad \cos 105 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Si ricava

$$\frac{EA}{AB} = \cos x \quad \to \quad \boxed{EA = a\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x}$$

$$\frac{EB}{AB} = \text{sen}\,x \quad \to \quad \boxed{EB = a\left(\sqrt{3}-1\right)\text{sen}\,x}$$

$$\frac{AF}{AC} = \cos\left(105-x\right) \quad \to \quad \boxed{AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left[\left(\sqrt{3}-2\right)\cos x + \text{sen}\,x\right]}$$

$$\frac{FC}{AC} = \text{sen}\left(105-x\right) \quad \to \quad \boxed{FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left[\cos x - \left(\sqrt{3}-2\right)\text{sen}\,x\right]}$$

Calcoliamo anche

$$\begin{cases} EF = EA + AF = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x\right) \\ EB^2 = 2a^2\left(2-\sqrt{3}\right)\text{sen}^2 x \\ FC^2 = \dfrac{3a^2}{4}\left[\cos^2 x + \left(7-4\sqrt{3}\right)\text{sen}^2 x + \left(4-2\sqrt{3}\right)\text{sen}x\cos x\right] \end{cases}$$

Il volume del solido è

$$V = V_{\text{tronco}} - V_{\text{cono AFC}} - V_{\text{cono ABE}} =$$

$$= \frac{\pi \cdot EF}{3}\left(FC^2 + EB^2 + FC \cdot EB\right) - \frac{\pi \cdot FC^2}{3} AF - \frac{\pi \cdot EB^2}{3} AE$$

Semplificando l'espressione si trova

$$V = \frac{\pi}{3}\left(EA \cdot FC^2 + AF \cdot EB^2 + EF \cdot FC \cdot EB\right)$$

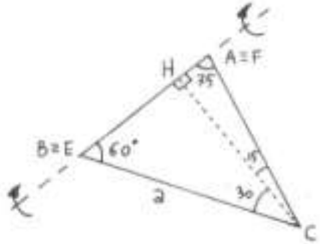
Sostituendo e semplificando si ha

$$\boxed{\begin{aligned}(1)\quad V = \frac{\pi a^3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}&\left(\frac{12-5\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x + \right.\\ &\left. + \frac{12-5\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos^3 x\right)\end{aligned}}$$

Che rappresenta (salvo errori od omissioni perché il calcolo pur facile concettualmente, è veramente laborioso) l'espressione cercata.
Controlliamo l'esattezza dell'espressione assegnando ad x un particolare valore notevole. Conviene porre x = 0 (e non x = 60 come suggerisce il testo). La (1) diviene

$$V = \frac{\pi a^3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

Guardando la figura, si ha



Cioè il solido è costituito semplicemente da due coni uniti per le basi. Risulta

$$BC = a \qquad HB = \frac{a}{2} \qquad AB = a\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$AH = \frac{2a\sqrt{3}-3a}{2} \qquad HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

E perciò

$$V = V_{cono\,BHC} + V_{cono\,AHC} = \frac{\pi a^3}{8} + \frac{\pi a^3\left(2\sqrt{3}-3\right)}{8} =$$

$$= \frac{\pi a^3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

Valore concorde a quello ottenuto con la (1).

Per calcolare la derivata della (1) e per studiarne il segno conviene porre

$$\begin{cases} p = \dfrac{\pi a^3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} \\ q = \dfrac{12-5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

In modo che la (1) diviene

$$V = p\left(q\,\text{sen}^3 x + \text{sen}^2 x\cos x + q\,\text{sen}x\cos^2 x + \cos^3 x\right)$$

Deriviamo

$$V' = p\Big[3q\,\text{sen}^2 x\cos x + 2\text{sen}x\cos^2 x - \text{sen}^3 x +$$
$$+ q\left(\cos^3 x - 2\text{sen}^2 x\cos x\right) - 3\text{sen}x\cos^2 x\Big]$$

Semplifichiamo e uguagliamo a zero

$$p\left[-\text{sen}^3 x + q\,\text{sen}^2 x\cos x - \text{sen}x\cos^2 x + q\cos^3 x\right] = 0$$

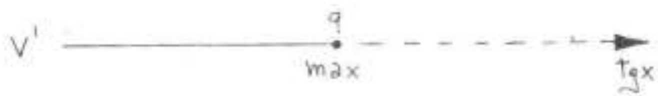
Dividiamo per p, cambiamo segno e dividiamo ancora per $\cos^3 x$. Si ha

$$\tan^3 x - q\tan^2 x + \tan x - q = 0$$

Che si annulla solo per

$$\tan x = q$$

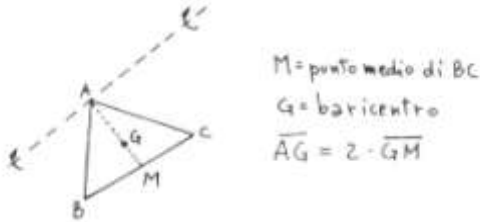
Lo studio del segno fornisce



Quindi il volume acquista valore massimo quando

$$\boxed{x = \arctan\frac{12-5\sqrt{3}}{3}}$$

Per rispondere all'ultima domanda occorre ricordare il teorema di Guldino secondo cui il volume di un solido di rotazione è dato dal prodotto dell'area della superficie che ruotando lo genera, per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di tale superficie.



poiché l’area del triangolo è costante, il volume del solido di rotazione è massimo quando il baricentro (contenuto nella mediana AM) si trova a una distanza massima dall’asse di rotazione. E ciò avviene quando l’asse di rotazione è perpendicolare alla mediana AM.

N.B. Nel teorema di Guldino l’asse di rotazione deve essere esterno alla superficie, e ciò nel nostro caso è verificato.