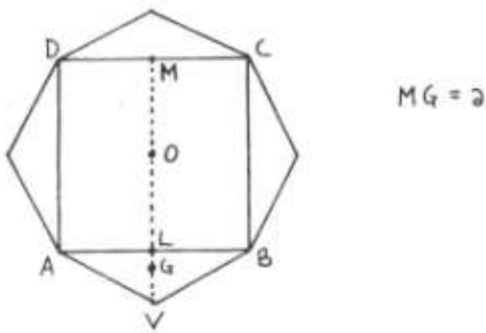
Settembre 1952

Quattro triangoli isosceli, uguali e complanari, hanno come basi i lati di un quadrato, non hanno punti in comune, ed inoltre sono tutti interni o tutti esterni al quadrato: essi, con i loro lati uguali determinano un ottagono equilatero.
Si sa che sono uguali ad a i quattro segmenti ciascuno dei quali congiunge il punto medio della base di uno dei triangoli col baricentro del triangolo contiguo, e si sa altresì che l'ottagono predetto è equivalente a un quadrato il cui lato possiede rispetto ad a, la misura data k.
Trovare le misure della base e dell'altezza dei quattro triangoli.
Discutere, distinguendo il caso dell'ottagono convesso, regolare o no, da quello dell'ottagono concavo, nonché il caso che l'ottagono possa essere considerato come lo sviluppo piano di una piramide regolare.



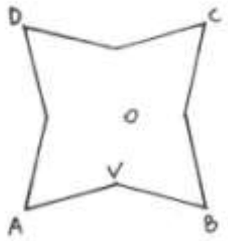
Poniamo LG = x, risulta GV = 2x e perciò

$$\boxed{LV = 3x}$$

È inoltre ML = AB = a – x e perciò

$$LB = \frac{a - x}{2}$$

Esaminiamo gli intervalli entro cui può variare la x. Quando la x è negativa V è interno al quadrato e l'ottagono è concavo.



Il valore minimo della x si ha quando $V \equiv O$ cioè

$$LV = -LB \quad \rightarrow \quad 3x = -\frac{a-x}{2} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{a}{5}$$

E l'ottagono degenera in una croce. L'ottagono è invece regolare quando OB = OV cioè

$$\begin{cases} OB = \sqrt{2 \cdot LB^2} = LB\sqrt{2} = (a-x)\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ OV = LB + LV = \dfrac{a-x}{2} + 3x = \dfrac{a+5x}{2} \end{cases}$$

$$(a-x)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a+5x}{2}$$

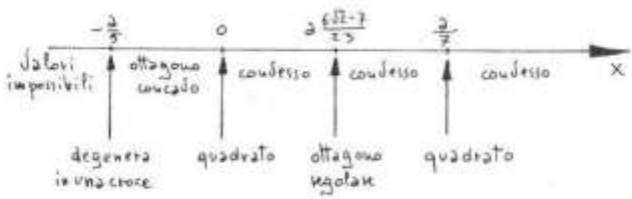
$$x = a\,\frac{6\sqrt{2}-7}{23}$$

L'ottagono diviene invece un quadrato (con superficie doppia rispetto a quello di lato AB), quando LB = LV. Cioè

$$\frac{a-x}{2} = 3x \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{7}$$

Per valori maggiori di x l'ottagono corrisponde sempre allo sviluppo di una piramide regolare.

Riassumendo si ha



Applichiamo ora la relazione del problema

$$S_{\text{ottagono}} = S_{\text{quadrato di lato ka}}$$

Cioè

$$S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABV} = k^2 a^2$$

$$(a-x)^2 + 4\frac{3x(a-x)}{2} = k^2 a^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 5x^2 - 4ax + k^2 a^2 - a^2 = 0 \\ -\frac{a}{5} < x < \infty \quad k > 0 \end{array}}$$

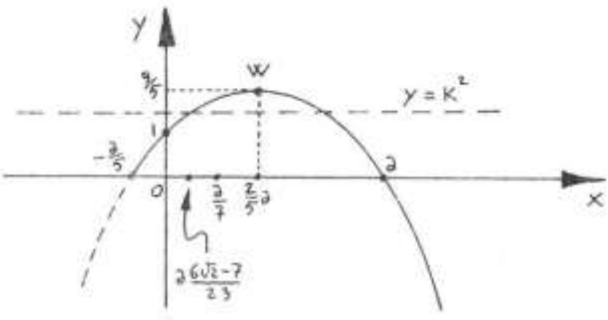
Ponendo $k^2 = y$ si ottiene

$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{a^2}x^2 + \dfrac{4}{a}x + 1 \\ y = k^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette orizzontali (esistenti solo nel semipiano delle y positive) e una parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso e vertice nel punto

$$W \equiv \left(\frac{2}{5}a; \frac{9}{5}\right)$$

Di essa dobbiamo considerare solo i punti con ascissa maggiore di $-\dfrac{a}{5}$.



Si hanno quindi sempre due soluzioni per $\quad 0 < k^2 \le \dfrac{9}{5}$

Cioè $$\boxed{0 < k \le \frac{3\sqrt{5}}{5}}.$$