Luglio 1953

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 = kx + (k-1)y + (1-k) \\ y^2 = -kx + (1-k)y + k \end{cases}$$

Tenendo presente che, qualunque sia il valore del parametro k, ammette la soluzione x = 1, y = 0.
Determinare poi per quali valori del parametro i valori x, y delle soluzioni, risultano reali e concordi oppure reali e discordi.
Nel caso particolare di $k = \frac{1}{2}$**, interpretando x e y come coordinate di un punto del piano, si disegnino i grafici delle due equazioni del sistema.**
Facoltativamente, nel predetto caso $k = \frac{1}{2}$**, si calcoli l'area di una qualunque delle regioni finite del primo quadrante, determinate dalle due curve.**

$$\begin{cases} x^2 = kx + (k-1)y + (1-k) \\ y^2 = -kx + (1-k)y + k \end{cases}$$

Si tratta di due fasci di parabole, rispettivamente con asse verticale e orizzontale. Il sistema è di quarto grado ed avrà quindi quattro soluzioni (reali o complesse).
Per risolvere il sistema conviene sommare membro a membro le due equazioni, ottenendo

$$x^2 + y^2 = 1$$

e associare a questa la seconda equazione esplicitata rispetto alla x.
Si ha quindi il nuovo sistema (equivalente al precedente)

$$\boxed{(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\dfrac{y^2}{k} + \dfrac{1-k}{k}y + 1 \end{cases}}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha

$$y^4 + y^3(2k-2) + y^2(2k^2-4k+1) + y(2k-2k^2) = 0$$

$$y\left[y^3 + y^2(2k-2) + y(2k^2-4k+1) + 2k-2k^2\right] = 0$$

Una soluzione (in accordo con quanto suggerito dal testo) è quindi

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}}$$

Dove la x è stata ottenuta sostituendo y = 0 nella seconda equazione delle (1).

Rimane l’equazione di terzo grado

$$y^3 + y^2(2k-2) + y(2k^2-4k+1) + 2k-2k^2 = 0$$

Che si annulla, come è facile constatare, per y = 1. Possiamo allora fattorizzarla con il metodo di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2k-2 & 2k^2-4k+1 & 2k-2k^2 \\ 1 & & 1 & 2k-1 & 2k^2-2k \\ \hline & 1 & 2k-1 & 2k^2-2k & // \end{array}$$

$$(y-1)\left[y^2 + y(2k-1) + 2k^2-2k\right] = 0$$

Un’altra soluzione è perciò

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}}$$

Resta l’equazione di secondo grado

$$y^2 + y(2k-1) + 2k^2-2k = 0$$

Che risolta fornisce

$$\boxed{(2) \quad y = \frac{1-2k \pm \sqrt{1+4k-4k^2}}{2}}$$

Sostituendo al solito nella seconda equazione delle (1) e semplificando, dopo calcoli leggermente laboriosi, si ottiene

$$\boxed{(3) \quad y = \frac{2k-1 \pm \sqrt{1+4k-4k^2}}{2}}$$

Dove il doppio segno deve essere preso superiore o inferiore in entrambe le espressioni.

Le prime due soluzioni non dipendono dal parametro k, e quindi tutte le parabole del fascio passano per i punti

$$A \equiv (1;0) \qquad B \equiv (0;1)$$

Le altre due soluzioni fornite dalle (2) e (3) corrispondono a soluzioni reali per

$$\Delta = 1 + 4k - 4k^2 \geq 0$$

Cioè

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Esse poi sono concordi se il loro prodotto è positivo, cioè

$$\frac{1-2k \pm \sqrt{\Delta}}{2} \cdot \frac{2k-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

$$\left(\pm\sqrt{\Delta} + 1 - 2k\right)\left(\pm\sqrt{\Delta} + 2k - 1\right) > 0$$

$$\left[\pm\sqrt{\Delta} + (1-2k)\right]\left[\pm\sqrt{\Delta} - (1-2k)\right] > 0$$

$$\Delta - (1-2k)^2 > 0$$

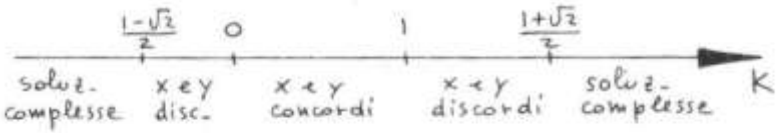
$$\left(1 + 4k - 4k^2\right) - \left(1 + 4k^2 - 4k\right) > 0$$

$$-8k^2 + 8k > 0$$

$$k(1-k) > 0$$

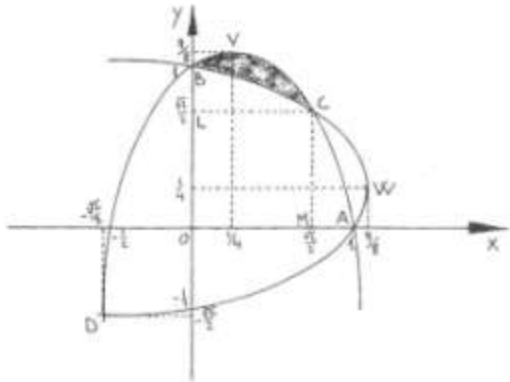
$$0 < k < 1$$

Si avrà quindi la situazione seguente



Ponendo ora $k = \frac{1}{2}$ i fasci danno luogo alle due parabole

$$\begin{cases} y = -2x^2 + x + 1 \\ x = -2y^2 + y + 1 \end{cases}$$



$$V \equiv \left(\frac{1}{4}; \frac{9}{8} \right) \quad W \equiv \left(\frac{9}{8}; \frac{1}{4} \right)$$

$$C \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad D \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Calcoliamo infine la superficie della regione ombreggiata. Essa può essere scomposta nel modo seguente

$$S = S_{OBVCM} - S_{OLCM} - S_{BLC}$$

Dove OLCM e un quadrato e la regione BLC è simmetrica, per simmetria, alla regione CMA. Quindi

$$S = S_{OBVCM} - S_{CMA} - OM^2$$

Cioè

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-2x^2 + x + 1\right) dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(-2x^2 + x + 1\right) dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} + 3}{12} - \frac{7 - 4\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{6}$$