Settembre 1953

È data la curva

$$ay = x^2 - a^2$$

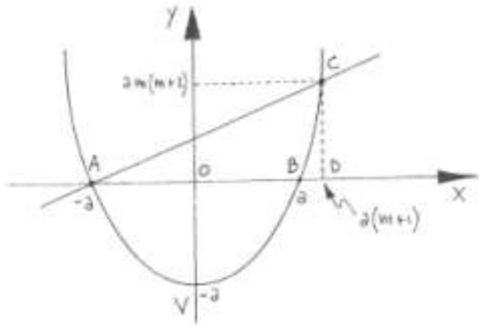
della quale siano A il punto di ordinata nulla e ascissa negativa e B quello di ordinata nulla e ascissa positiva.
Condotta per A una retta di coefficiente angolare m, si indichino con C l'altra intersezione con la parabola e con D la proiezione ortogonale di C sull'asse delle x.
Determinare la retta per A in modo che:

1) **L'area del triangolo ACD sia uguale a** $ha^2m^2 \quad (\text{con}\, h > 0)$
2) **L'area della parte finita di piano limitata dall'asse delle x, dalla retta AC e dall'arco BC di parabola sia** $ka^2m^2 \quad (\text{con}\, k > 0)$

La curva, posta nella forma

$$y = \frac{1}{a}x^2 - a$$

È facilmente riconoscibile come una parabola



Il vertice ha coordinate $V \equiv (0; -a)$. Il fascio di rette con centro A ha equazione

$$y = m\,(x + a)$$

Calcoliamo le coordinate di A e C risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} - a \\ y = m(x+a) \end{cases}$$

Confrontando fra loro i due secondi membri si ottiene

$$x^2 - max - a^2 - ma^2 = 0 \quad \to \quad x = \left\langle \begin{array}{l} ma + a \\ -a \end{array} \right.$$

E cioè

$$A \equiv (-a;0) \qquad C \equiv (ma + a; m^2a + 2am)$$

La base e l’altezza del triangolo ACD sono perciò

$$\begin{cases} AD = AO + OD = am + 2a \\ CD = m^2a + 2am \end{cases}$$

Applicando la relazione del problema si ha

$$\frac{AD \cdot CD}{2} = ha^2m^2 \quad \to \quad \boxed{(1) \quad m^2 - 2m(h-2) + 4 = 0}$$

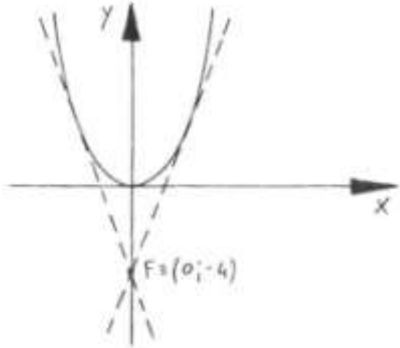
Che è l’equazione parametrica da discutere, senza alcuna limitazione per la variabile m e con h > 0. Poniamo

$$\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} y = x(2h-4) - 4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro $F \equiv (0;-4)$ determinato assegnando ad h due valori arbitrari (per esempio h = 2 e h = 0) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute. E una parabola con vertice nell’origine e concavità verso l’alto.



La retta del fascio è tangente o secante la parabola, a seconda che

$$\Delta = (2h-4)^2 - 16 \geq 0 \quad \to \quad \boxed{0 < h \leq 4}$$

Entro tale intervallo il problema ammette sempre due soluzioni perché vi sono due intersezioni fra la retta del fascio e la parabola.
Passiamo ora alla determinazione dell'area del triangolo ide BCD (che risulterà espresso in funzione della variabile m).

$$S_{BCD} = \int_a^{a+am} \left(\frac{x^2}{a} - a \right) dx = \left[\frac{x^3}{3a} - ax \right]_a^{a+am} = \frac{a^2m^2(m+3)}{3}$$

L'area del triangolo ide ACB è allora

$$S_{ACB} = S_{ACD} - S_{BCD}$$

$$S_{ACB} = \frac{a^2m(m+2)^2}{2} - \frac{a^2m^2(m+3)}{3}$$

Applicando l'altra relazione del problema si ha

$$S_{ACB} = ka^2m^2 \quad \to \quad \boxed{(2) \quad m^2 - m(6k-6) + 12 = 0}$$

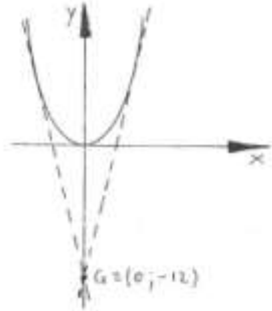
Che è la seconda equazione parametrica da discutere, con $k > 0$. Ponendo come prima

$$\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{cases} y = x(6k-6) - 12 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Cioè ancora un fascio di rette con centro $G \equiv (0;-12)$ e una parabola.



La retta del fascio è tangente o secante la parabola, a seconda che

$$\frac{\Delta}{4} = (3k-3)^2 - 12 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad k \geq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

Ma dovendo essere k > 0, ne deriva che il problema ammette sempre due soluzioni quando

$$\boxed{k \geq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}}$$