Luglio 1954

Nel triangolo ABC rettangolo in B, l'angolo acuto BAC ha ampiezza nota α.
Considerata la semicirconferenza di diametro AB esterna al triangolo, si trovi su di essa un punto P in modo che condotta per P la perpendicolare ad AB fino a incontrare l'ipotenusa AC nel punto Q, risulti

$$AQ + QP = k \cdot AB$$

Essendo k un numero reale positivo assegnato. Discussione.
Si esaminino i casi particolari in cui si abbia

$$AC = 2 \cdot BC$$

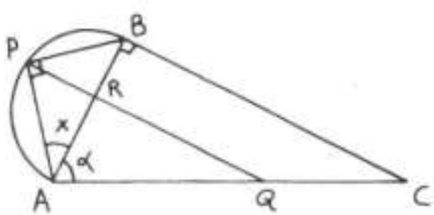
$$AC = 2 \cdot AB$$

$$AB = BC$$

Poniamo

$$AB = 2r$$

$$PAB = x \quad (\text{con } \; 0 \le x \le 90)$$



Nel triangolo PAB è

$$\frac{PA}{AB} = \cos x \quad \rightarrow \quad PA = 2r\cos x$$

E quindi nel triangolo PAR si ha

$$\frac{AR}{PA} = \cos x \quad \rightarrow \quad AR = PA \cdot \cos x = 2r\cos^2 x$$

$$\frac{PR}{PA} = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad PR = PA \cdot \operatorname{sen} x = 2r \operatorname{sen} x \cos x$$

Nel triangolo ARQ è infine

$$\frac{AR}{AQ} = \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{AQ = \frac{2r\cos^2 x}{\cos\alpha}}$$

$$\frac{RQ}{AR} = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad RQ = 2r\cos^2 x \tan\alpha$$

È inoltre PQ = PR + RQ e quindi

$$\boxed{PQ = 2r\,\text{sen}\,x\cos x + 2r\cos^2 x\tan\alpha}$$

Applichiamo ora la relazione del problema

$$AQ + PQ = k \cdot AB$$

$$\frac{2r\cos^2 x}{\cos\alpha} + 2r\,\text{senx}\cos x + 2r\cos^2 x\tan\alpha = k \cdot 2r$$

Dividendo per 2r e semplificando si ottiene

$$k\tan^2 x - \tan x + k - \frac{\text{sen}^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = 0$$

Ponendo l'espressione (costante)

$$\frac{\text{sen}^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = a$$

Si ha

$$\boxed{\begin{array}{l} k\tan^2 x - \tan x + k - a = 0 \\ 0 \le \tan x \le \infty,\ k > 0, a > 0 \end{array}}$$

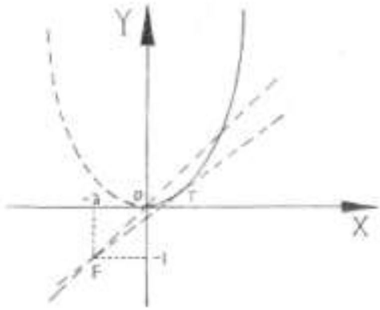
Che è l'equazione parametrica da discutere. Poniamo

$$\begin{cases} \tan x = X \\ \tan^2 x = Y \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y = \dfrac{1}{k}X - 1 + \dfrac{a}{k} \\ Y = X^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro $F \equiv (-a; -1)$ determinato assegnando ad h due valori arbitrari (per esempio k = a e k = 1) e risolvendo il sistema delle due rette così ottenute. E una parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto, di cui si deve considerare solo l'arco con ascisse positive.



Determiniamo per quale valore di k la retta del fascio passa per l'origine imponendo al fascio stesso di passare per (0;0). Si ha

$$0 = -1 + \frac{a}{k} \quad \rightarrow \quad k = a$$

La retta del fascio è verticale quando il suo coefficiente angolare è infinito, cioè

$$\frac{1}{k} = \infty \qquad \rightarrow \qquad k = 0$$

Infine la retta del fascio è tangente o secante la parabola se

$$\Delta = 1 - 4k\left(k - a\right) \geq 0$$

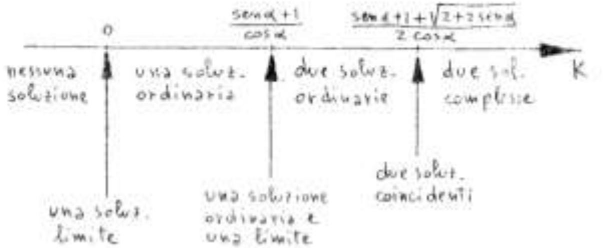
Cioè

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{2} \leq k \leq \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{2}$$

Si ha la tangenza in T per

$$k = \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + 1 + \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\alpha}}{2\cos\alpha}$$

Perché il coefficiente angolare deve essere positivo. Riassumendo, si ha la situazione seguente



Nel caso in cui AC = 2 BC, si ha

$$\alpha = 30° \quad \to \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \to \quad a = \frac{\dfrac{1}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

Se invece AC = 2 AB, avremo

$$\alpha = 60° \quad \to \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \to \quad a = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}+2$$

Se infine AB = BC, si ha

$$\alpha = 45° \quad \to \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \to \quad a = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1+\sqrt{2}$$