Settembre 1954

Una semicirconferenza ha il diametro AB di lunghezza 2r. Nel semipiano che la contiene sia dato sulla tangente in A un punto M tale che AM = 4r.
Determinare sulla semicirconferenza i punti P per i quali sussista la relazione

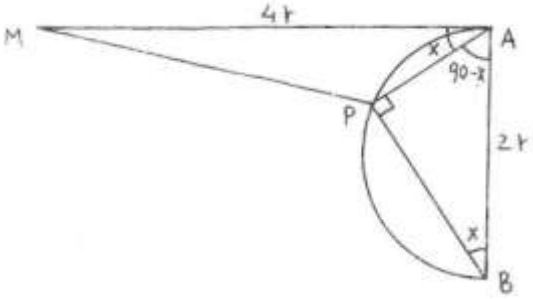
$$MP = AP + k \cdot BP$$

Essendo k un numero reale assegnato. Discussione.
Facoltativo: Si supponga AM = mr, con m positivo. Si ponga ABP = x.

Poniamo come consigliato

$$ABP = x \quad \text{con} \quad 0 \le x < 90°$$

E calcoliamo AP e BP nel triangolo APB.



$$\frac{AP}{BP} = \text{sen}\, x \quad \rightarrow \quad AP = 2r \,\text{sen}\, x$$

$$\frac{BP}{AB} = \cos x \quad \rightarrow \quad BP = 2r \cos x$$

Poiché PAB = 90 – x risulta MAP = x e quindi applicando il teorema di Carnot al triangolo MAP, si ha

$$MP = \sqrt{MA^2 + PA^2 - 2 \cdot MA \cdot PA \cdot \cos x} =$$

$$= \sqrt{16r^2 + 4r^2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \cdot 4r \cdot 2r \operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= 2r\sqrt{4 + \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= 2r\sqrt{4\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) + \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= 2r\sqrt{5\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x + 4\cos^2 x}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$MP = AP + k \cdot BP$$

$$2r\sqrt{4\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) + \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= 2r \operatorname{sen} x + 2r\, k \cos x$$

Dividendo i due membri per 2r cos x, si ottiene

$$(1) \qquad \sqrt{5\tan^2 x - 4\tan x + 4} = \tan x + k$$

$$\tan x \geq 0$$

Eseguiamo la discussione grafica ponendo

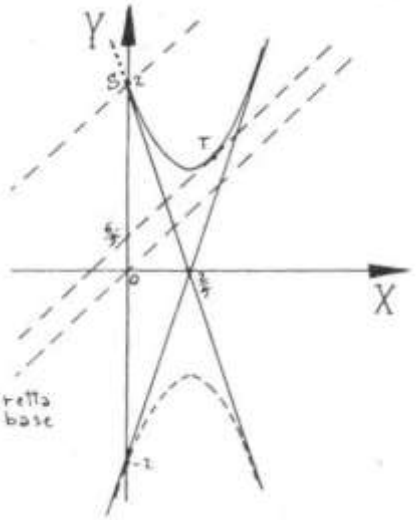
$$\begin{cases} \tan x = X \\ \sqrt{5\tan^2 x - 4\tan x + 4} = Y \end{cases}$$

Dalle (1) si ottiene

$$\begin{cases} Y = X + k \\ 5X^2 - 4X + 4 = Y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X + k \\ 5X^2 - Y^2 - 4X + 4 = 0 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e una iperbole traslata (che tratteremo utilizzando i concetti già esposti nel primo problema del settembre 1951), di cui dovremo considerare solo il ramo con $X \geq 0$ e $Y \geq 0$ (perché è un radicale).



$\Delta = 20 > 0$ e perciò la conica è una iperbole. Il centro di simmetria ha coordinate

$$x_0 = \frac{2dc - be}{\Delta} = \frac{2}{5} \qquad y_0 = \frac{2ae - bd}{\Delta} = 0$$

Uguagliando a zero i termini di secondo grado della conica, si ha

$$5x^2 - y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x\sqrt{5} + y\right)\left(x\sqrt{5} - y\right) = 0$$

E perciò i coefficienti angolari degli asintoti sono

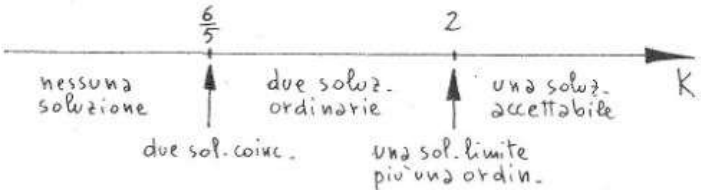
$$m = \pm\sqrt{5}$$

L'iperbole taglia l'asse y nei punti ± 2 e non taglia mai l'asse x. La retta del fascio è tangente alla iperbole per

$$\frac{\Delta}{4} = (k+2)^2 - 4\left(4 - k^2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad k = \begin{cases} \frac{6}{5} \\ -2 \end{cases}$$

La soluzione positiva corrisponde alla tangenza in T mentre l'altra è da scartare.

La retta del fascio passa per S quando k = 2. Si ha perciò



Tralasciamo la generalizzazione facoltativa (AM = mr) perché porta a calcoli inutilmente troppo laboriosi.