

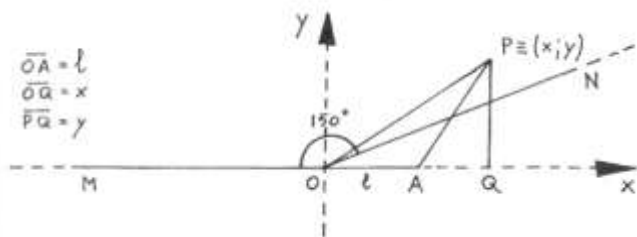
Settembre 1955

Siano dati l'angolo MON di 150° ed il punto A della semiretta opposta al lato OM , tale che $OA = \ell$. Trovare un punto P interno all'angolo dato, in modo che indicata con Q la sua proiezione ortogonale sulla retta MA , si abbiano le relazioni

$$OA + 2 \cdot OQ = 2\sqrt{3} \cdot QP$$

$$OP^2 + AP^2 = k \cdot OA^2$$

Con k numero reale positivo. E' in facoltà del candidato trattare il problema per via geometrica.



Applicando la prima relazione del problema si ha

$$OA + 2 \cdot OQ = 2\sqrt{3} \cdot QP \rightarrow$$

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\ell$$

Inoltre, poiché

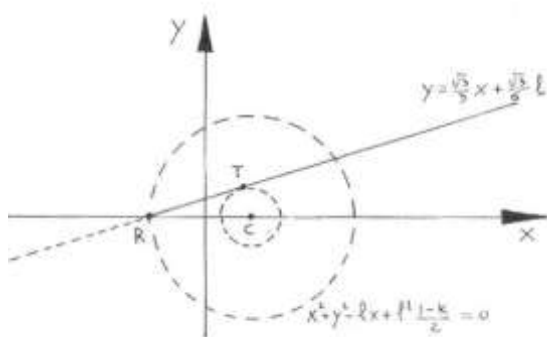
$$AP^2 = (x - \ell)^2 + y^2 = x^2 - 2\ell x + \ell^2 + y^2$$

$$OP^2 = x^2 + y^2$$

Applicando la seconda relazione si ottiene

$$OP^2 + AP^2 = k \cdot OA^2 \rightarrow$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - \ell x + \ell^2 \frac{1-k}{2} = 0$$



La (1) è una retta il cui tratto utile è quello della $y > 0$, cioè dal punto

$$R \equiv \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$$

In su. La (2) invece è una famiglia di circonferenze concentriche con centro in

$$C \equiv \left(\frac{\ell}{2}; 0\right)$$

Determiniamo per quale valore di k la circonferenza della famiglia passa per R imponendole il passaggio per tale punto

$$\frac{\ell^2}{4} + 0 + \frac{\ell^2}{2} + \ell^2 \frac{1-k}{2} = 0 \rightarrow k = \frac{5}{2}$$

Determiniamo ora le coordinate di T . La retta TC ha equazione

$$y - 0 = -\sqrt{3} \left(x - \frac{\ell}{2}\right) \rightarrow y = -x\sqrt{3} + \ell \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mettendola a sistema con la retta RT , si ottiene

$$T \equiv \left(\frac{\ell}{4}; \frac{\ell\sqrt{3}}{4}\right)$$

Imponiamo alla famiglia di circonferenze di passare per T

$$\frac{\ell^2}{16} + \frac{3\ell^2}{16} - \frac{\ell^2}{4} + \ell^2 \frac{1-k}{2} = 0 \rightarrow k = 1$$

Riassumendo si ha quindi la situazione seguente

