Luglio 1956

Siano date le due curve

$$C_1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x^2 - a}{2}$$

$$C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{x}$$

Si determini la relazione che deve sussistere fra a e b affinché le due curve si incontrino in un punto P_1 del primo quadrante, avente ascissa 2.
Indicate con P_2 e P_3 le ulteriori intersezioni delle due curve e condotte per esse le tangenti alla C_2 si denotino con T_2 e T_3 i punti di tali tangenti che hanno ordinata nulla, e se ne calcolino le ascisse.
Si determini infine a in modo che la distanza fra T_2 e T_3 sia

4 k (a-2)

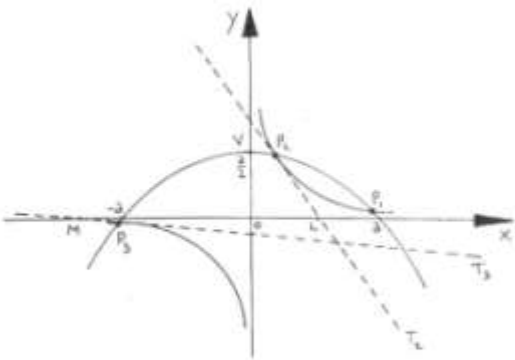
Essendo k un numero positivo dato.
Facoltativo: Condotte da P_2 e P_3 le parallele all'asse x, si calcoli l'area della regione comune alla striscia da esse determinata e dalla curva C_1.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{a}{2} \\ xy = b \end{cases}$$

La C_1 è una parabola con vertice nel punto

$$V \equiv \left(0; \frac{a}{2}\right)$$

E concavità rivolta verso il basso. La C_2 è invece una iperbole equilatera con gli asintoti coincidenti con gli assi coordinati, e che occupa il primo e il terzo quadrante se $b > 0$.
Determiniamo la relazione che deve esistere fra i coefficienti a e b.



Ricaviamo la y dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima.

$$\frac{b}{x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{a}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{(1) \quad x^3 - ax + 2b = 0}$$

Le tre soluzioni di questa equazione di terzo grado sono le ascisse dei tre punti di intersezione P_1 P_2 P_3.
Se uno di essi, per esempio P_1 ha ascissa 2, la (1) deve essere soddisfatta per x = 2. Ne deriva che

$$8 - 2a + 2b = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{(2) \quad b = a - 4}$$

La (1) diviene

$$x^3 - ax + 2a - 8 = 0$$

Fattorizzando l'equazione con il metodo di Ruffini si ha

	1	0	−a	2a − 8
2		2	4	8 − 2a
	1	2	4 − a	=

$$(x-2)\left(x^2 + 2x + 4 - a\right) = 0$$

Per cui le tre ascisse di P_1 P_2 P_3 sono

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1 + \sqrt{a-3} \qquad x_3 = -1 - \sqrt{a-3}$$

E le coordinate complete sono

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1 \equiv \left(2;\dfrac{a}{2}-2\right) \\ P_2 \equiv \left(-1+\sqrt{a-3};1+\sqrt{a-3}\right) \\ P_3 \equiv \left(-1-\sqrt{a-3};1-\sqrt{a-3}\right) \end{array}}$$

Poiché, come si è detto, deve essere b > 0, dalla (2) si ricava che deve essere a > 4 (ciò garantisce anche la realtà del radicale $\sqrt{a-3}$)-

La derivata della C_2 è

$$y=\frac{a-4}{x} \qquad \to \qquad y'=\frac{4-a}{x^2}$$

E perciò i coefficienti angolari delle due rette tangenti all'iperbole, sono

$$\begin{cases} m_2 = f'\left(-1+\sqrt{a-3}\right)=\dfrac{4-a}{\left(-1+\sqrt{a-3}\right)^2}=\dfrac{a-2+2\sqrt{a-3}}{4-a} \\ m_3 = f'\left(-1-\sqrt{a-3}\right)=\dfrac{4-a}{\left(-1-\sqrt{a-3}\right)^2}=\dfrac{a-2-2\sqrt{a-3}}{4-a} \end{cases}$$

Le due rette tangenti hanno equazione

$$x_2=\frac{-8\sqrt{a-3}+2a\sqrt{a-3}+2a-8}{a-2+2\sqrt{a-3}}=.......=2\left(\sqrt{a-3}-1\right)$$

$$x_3=\frac{8\sqrt{a-3}-2a\sqrt{a-3}+2a-8}{a-2-2\sqrt{a-3}}=.......=-2\left(\sqrt{a-3}+1\right)$$

Imponiamo ora la relazione del problema

$$x_2x_3=4k(a-2)$$

$$2\left(\sqrt{a-3}-1\right)+2\left(\sqrt{a-3}+1\right)=4k(a-2)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{a-3}=k(a-2) \\ a>4\end{array}}$$

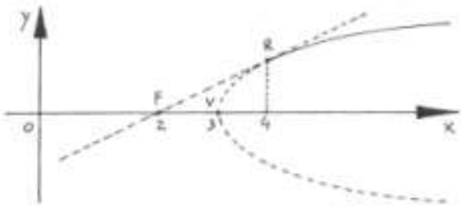
Che è l'equazione parametrica da discutere. Poniamo

$$\begin{cases} a=x \\ \sqrt{a-3}=y \end{cases}$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} y = k(x-2) \\ x = y^2 + 3 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette con centro nel punto $F \equiv (2;0)$ e una parabola con vertice nel punto $V \equiv (3;0)$, concavità verso destra e di cui dovremo considerare solo l'arco con x > 4 e y > 0.



La retta del fascio passa per $R \equiv (4;1)$ quando

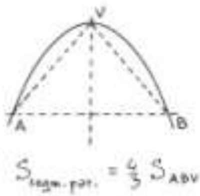
$$1 = k(4-2) \qquad \to \qquad k = \frac{1}{2}$$

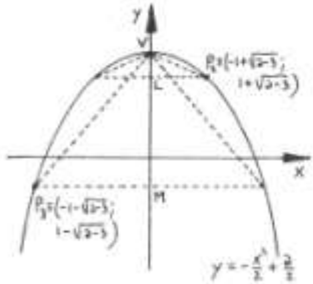
Per tale valore, come si può facilmente verificare, la retta del fascio risulta anche tangente alla parabola.
Si ha dunque sempre una sola soluzione per

$$\boxed{0 < k < \frac{1}{2}}$$

Passiamo alla parte facoltativa e determiniamo la superficie richiesta ma non con il calcolo integrale, ma applicando una proprietà della parabola, nota dall'antica grecia.

L'area di un segmento di parabola è sempre equivalente ai $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo isoscele avente la base sulla corda e il vertice sul vertice della parabola.





Si ha

$$VL = \frac{a - 2 - 2\sqrt{a-3}}{2} \qquad LP_2 = -1 + \sqrt{a-3}$$

$$VM = \frac{a - 2 + 2\sqrt{a-3}}{2} \qquad MP_3 = 1 + \sqrt{a-3}$$

Calcolando l'area dei due segmenti parabolici e facendo la differenza, si ha

$$\boxed{S = \frac{4(3a-8)}{3}}$$