

Settembre 1956

Sia CD una corda di una data semicirconferenza di centro O e diametro AB , e sia E il punto comune ai prolungamenti delle corde AC , BD . Sapendo che

$$CD = \frac{7}{25} AB$$

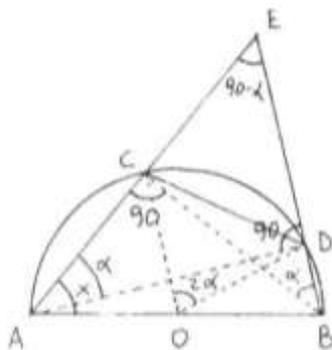
Si determini l'ampiezza x dell'angolo OAC , in modo che abbia luogo la relazione

$$\frac{AE}{AB} + \frac{13}{25} \frac{BE}{AB} = k$$

Essendo k un numero positivo assegnato.

N.B. Si osservi che i due triangoli ECD ed EBA sono simili. Si consiglia poi di indicare con 2α l'ampiezza dell'angolo COD e di calcolare preliminarmente i valori delle funzioni goniometriche di α .

Facoltativamente il candidato può trattare il caso più generale in cui al rapporto $\frac{13}{25}$ sia sostituito un secondo parametro m .



Poiché $COD = 2\alpha$ risultano $CAD = CBD = \alpha$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco dell'angolo al centro COD . Sono inoltre retti gli angoli

$$ACB = ECB = ADB = ADE = 90^\circ$$

Calcoliamo, come consigliato, i valori delle funzioni trigonometriche per l'angolo α .

Per il teorema della corda è $CD = AB \sin \alpha$, ma per la relazione fornita dal problema è anche $CD = \frac{7}{25} AB$ e quindi confrontando i due secondi membri si ha

$$AB \sin \alpha = \frac{7}{25} AB \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{7}{25}$$

Risulta allora

$$\begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25} \\ \tan \alpha = \frac{7}{25} : \frac{24}{25} = \frac{7}{24} \end{cases}$$

Poniamo ora

$$EAB = x \quad \text{con } \alpha < x < 90$$

Si ha

$$\frac{AC}{AB} = \cos x \quad \rightarrow \quad \boxed{AC = AB \cos x}$$

$$\frac{CB}{AB} = \sin x \quad \rightarrow \quad CB = AB \sin x$$

$$\frac{CE}{CB} = \tan \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{CE}{CB} = \frac{7}{24} \quad \rightarrow \quad \boxed{CE = \frac{7}{24} AB \sin x}$$

$$\frac{AD}{AB} = \cos(x - \alpha) \quad \rightarrow \quad AD = \frac{AB}{25} (7 \sin x + 24 \cos x)$$

$$\frac{DB}{AB} = \sin(x - \alpha) \quad \rightarrow \quad \boxed{DB = \frac{AB}{25} (24 \sin x - 7 \cos x)}$$

$$\frac{ED}{AD} = \tan \alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{ED = 7 \frac{AB}{600} (7 \sin x + 24 \cos x)}$$

e ancora

$$\begin{cases} AE = AC + CE = \dots = AB \left(\cos x + \frac{7}{24} \sin x \right) \\ EB = ED + DB = \dots = AB \cdot \frac{25}{24} \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{AE}{AB} = \cos x + \frac{7}{24} \operatorname{sen} x \\ \frac{EB}{AB} = \frac{25}{24} \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{AE}{AB} + \frac{13}{25} \frac{EB}{AB} = k$$

$$\cos x + \frac{7}{24} \operatorname{sen} x + \frac{13}{25} \cdot \frac{25}{24} \operatorname{sen} x = k$$

$$(1) \quad \begin{cases} 5 \operatorname{sen} x + 6 \cos x = 6k \\ \alpha < x < 90 \quad k > 0 \end{cases}$$

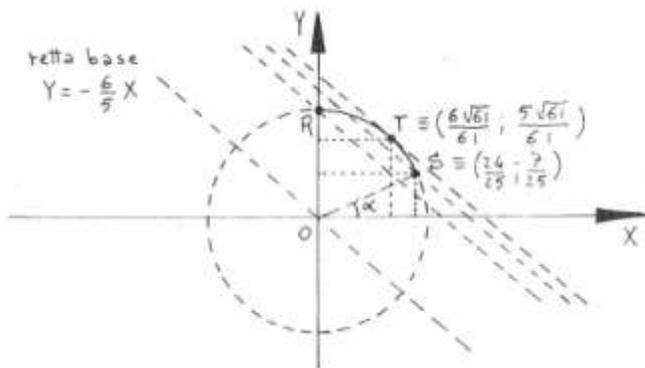
Eseguiamo la discussione geometrica ponendo

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \operatorname{sen} x = Y \end{cases}$$

E associando alla (1) la relazione fondamentale della trigonometria. Si ottiene

$$\begin{cases} 6X + 5Y = 6k \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\frac{6}{5}$ e un arco di circonferenza (con centro nell'origine e raggio unitario) pari a RS con estremi corrispondenti ai limiti $x = \alpha$ e $x = 90$. Si ha il grafico seguente



La retta del fascio passa per

$$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ quando } k = \frac{5}{6} \\ S \text{ quando } k = \frac{179}{150} \\ T \text{ quando } k = \frac{\sqrt{61}}{6} \end{array} \right.$$
