Luglio 1957

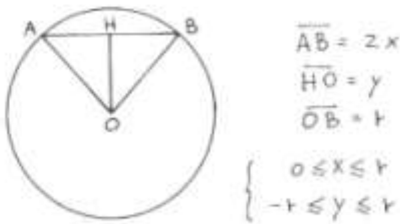
È data una circonferenza di centro O e raggio r, della quale sia AB una corda il cui punto medio è H.
Determinare la lunghezza 2x di tale corda in modo che risulti

$$2\,AB + 3\,OH = kr$$

Con k numero positivo dato.
Successivamente, fissata una corda AB che soddisfi la precedente condizione, si determini sulla circonferenza un punto C in modo che si abbia

$$AC^2 + BC^2 = m\,AB^2$$

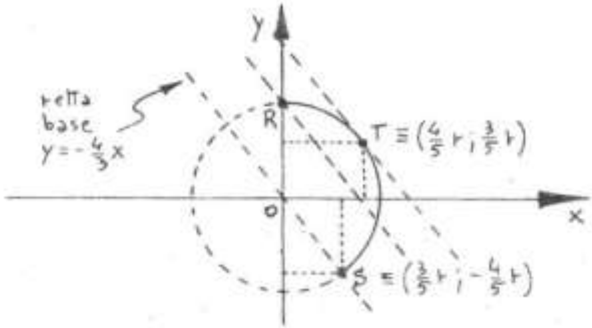
Essendo m un numero positivo.
N.B. Si assuma come incognita l'angolo CAB e si tenga presente che l'angolo ACB, una volta fissata la corda AB, è da considerarsi noto.



La relazione del problema e il teorema di Pitagora applicato al triangolo OHB, costituiscono il sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y = kr \quad (\text{con } k > 0) \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Cioè un fascio di rette parallele con coefficiente angolare $m = -\dfrac{4}{3}$, e una circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario di cui dovremo considerare solo l'arco utile RS

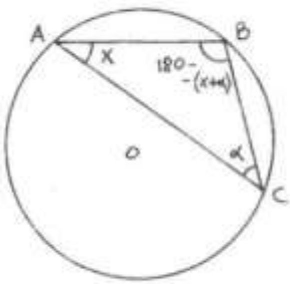


Dove il punto S è determinato dalla condizione k > 0. La retta del fascio passa per

$$\begin{cases} S \quad \text{quando} \quad k = 0 \\ R \quad \text{quando} \quad k = 3 \\ T \quad \text{quando} \quad k = 5 \end{cases}$$

E quindi

Passiamo ora alla seconda parte del problema. Consideriamo AB (e quindi α) costante e C variabile sulla circonferenza.



Per il teorema della corda è

$$\begin{cases} AB = 2r\,\text{sen}\,\alpha \\ BC = 2r\,\text{sen}\,x \\ AC = 2r\,\text{sen}\left[180 - \left(x+\alpha\right)\right] = 2r\,\text{sen}\left(x+\alpha\right) \end{cases}$$

E applicando la relazione del problema si ha

$$AC^2 + BC^2 = m\,AB^2$$

$$4r^2\text{sen}^2\left(x+\alpha\right) + 4r^2\text{sen}^2 x = m \cdot 4r^2\text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}^2\left(x+\alpha\right) + \text{sen}^2 x = m \cdot \text{sen}^2\alpha$$

Sviluppando e dividendo per $\cos^2 x$ (dopo aver reso l'equazione omogenea di secondo grado), si ha

$$\tan^2 x\left(\cos^2\alpha - m\,\text{sen}^2\alpha\right) + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\tan x +$$

$$+\,\text{sen}^2\alpha\left(1-m\right) = 0$$

Equazione parametrica piuttosto complessa che può essere discussa dopo aver assegnato ad α un valore arbitrario (per esempio $\alpha = 45°$).

$$\tan^2 x\left(3-m\right) + 2\tan x + \left(1-m\right) = 0$$

$$-45 < x < 135 \qquad m > 0$$

E si pone $\tan x = X$ e $\tan^2 x = Y$.