Settembre 1957

Discutere la realtà e il segno delle radici dell'equazione

$$(1) \qquad (m+1)x^2 - 2(m-1)x + (m-2) = 0$$

Ricavando poi dalla (1) il parametro m in funzione della x, si studi tale funzione determinandone fra l'altro gli eventuali valori massimi o minimi.

Successivamente, posto

$$(2) \qquad y = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + (m-2)$$

Si risolva il sistema che si ottiene attribuendo ad m i valori particolari 0 e – 2 del parametro m, e si verifichi:

1. **Che le due parabole si toccano nel loro punto comune.**
2. **Che una qualunque retta passante per tale punto stacca sulle due parabole corde uguali.**

Nella (1) ponendo $x^2 = y$ si ha il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{2m-2}{m+1}x + \dfrac{2-m}{m+1} \end{cases}$$

Cioè una parabola e un fascio di rette con centro nel punto

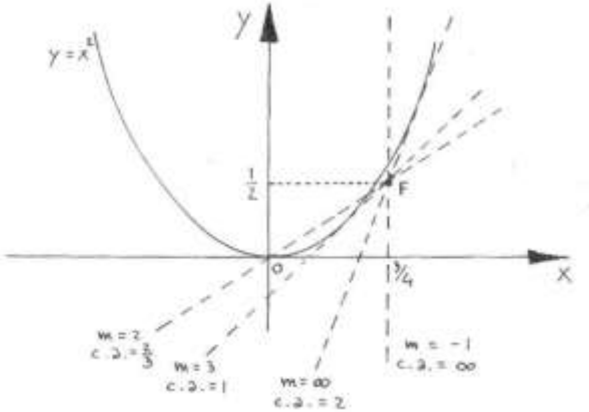
$$F \equiv \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right)$$

La retta generica del fascio e la parabola sono tangenti fra loro quando

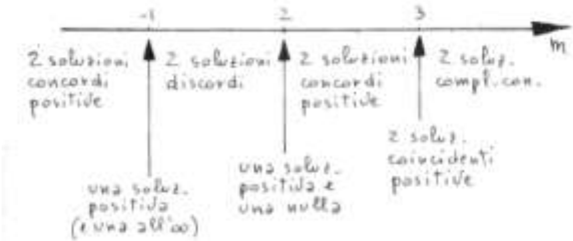
$$x^2 - 2x\frac{m-1}{m+1} + \frac{m-2}{m+1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^2 - \frac{m-2}{m+1} = 0$$

Cioè

$$\begin{cases} m = 3 & \rightarrow \quad \text{coeff.angolare} = 1 \\ m = \infty & \rightarrow \quad \text{coeff.angolare} = 2 \end{cases}$$



Osservando la figura (in cui sono indicati i valori di m e dei coefficienti angolari delle rette più significative), si ricava la situazione seguente



Esplicitando la m nella (1) si ottiene la funzione

$$\boxed{m = \frac{-x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}}$$

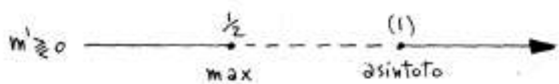
Funzione algebrica razionale fratta di terzo grado, con un asintoto verticale in x = 1 ed uno orizzontale m = 1.
Essa attraversa gli assi nei punti

$$(0;2) \qquad \left(-1-\sqrt{3};0\right) \qquad \left(-1+\sqrt{3};0\right)$$

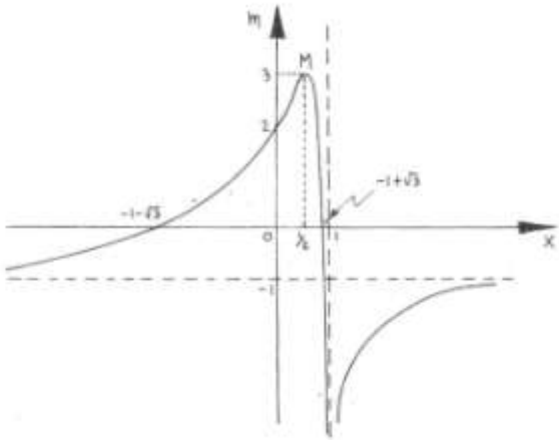
La derivata è

$$m' = \frac{2\left(2x^2 - 3x + 1\right)}{(x-1)^4}$$

Lo studio del segno fornisce



Quindi la curva ha un massimo nel punto $M \equiv \left(\frac{1}{2}; 3 \right)$



Apriamo ora una parentesi per esporre un metodo alternativo a quello usato in problemi precedenti quando dovevamo trovare il centro di un fascio di rette.
Per esempio nel primo problema del 1948 avevamo il fascio di rette

$$y(k-1) + 2krx - r^2 = 0$$

E assegnammo i seguenti valori presi a caso per trovare due rette del fascio

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad -y - r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -r^2$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad 2rx - r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{r}{2}$$

E risolvendo il sistema delle due rette si trovava il centro

$$C \equiv \left(\frac{r}{2}; -r^2 \right)$$

Procediamo invece in quest'altro modo alternativo: nell'equazione del fascio esplicitiamo il parametro k ottenendo

$$k = \frac{y + r^2}{y + 2rx}$$

Ora uguagliamo a zero il numeratore e il denominatore della frazione ottenendo così due rette che messe a sistema restituiscono nuovamente il centro del fascio trovato precedentemente

$$\begin{cases} y + r^2 = 0 \\ y + 2rx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -r^2 \\ y = -2rx \end{cases} \Rightarrow C \equiv \left(\frac{r}{2}; -r^2 \right)$$

Fine della parentesi.
Ora torniamo al nostro problema: anche la (2) è un fascio (di parabole, non di rette) in cui esplicitando il parametro m si ottiene

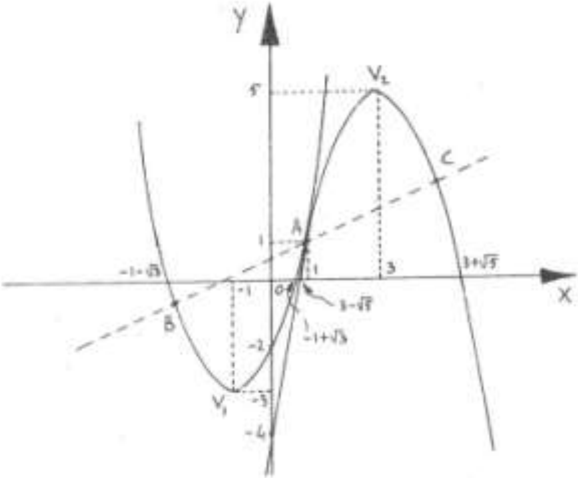
$$m = \frac{y - x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Uguagliando a zero il numeratore e denominatore della frazione si ha

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ che è il punto fisso del fascio di parabole.
Allo stesso risultato si poteva comunque arrivare ugualmente osservando che la (2) per x = 1 e y = 1 diviene una identità, quindi corrisponde a una famiglia di parabole con asse verticale e passanti tutte per il punto
A = (1;1).
Diamo ora ad m i due valori (m = 0 e m = – 2) suggeriti dal problema. Si ottengono le due parabole

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$$



Esse passano per A e hanno i vertici nei punti

$$V_1 \equiv (-1;-3) \qquad V_2 \equiv (3;5)$$

La retta generica passante per A ha equazione

$$y = mx - m + 1$$

mettendo a sistema questa equazione con quella di ciascuna delle due parabole e risolvendo, si ottengono le coordinate dei punti B e C (in funzione del parametro m). Si ha

$$\begin{cases} B \equiv (m-3; m^2-4m+1) \\ C \equiv (5-m; -m^2+4m+1) \end{cases}$$

Rispondiamo all'ultima domanda calcolando il punto medio del segmento BC. Le sue coordinate sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{m-3+5-m}{2} = 1 \\ y = \dfrac{(m^2-4m+1)+(-m^2+4m+1)}{2} = 1 \end{cases}$$

Che sono le coordinate del punto A. Quindi qualunque sia il valore del parametro m, A è sempre il punto medio del segmento BC. E le due corde BA ed AC sono sempre uguali.