Luglio 1958

Sono date le due parabole di equazioni

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = x^2 + 3x + 2 \end{cases}$$

Detto $A \equiv (-1;0)$ **il punto che esse hanno in comune e considerata una retta r passante per A e non parallela all'asse delle ordinate, siano:**

- ✓ **B l'ulteriore intersezione di r con la prima parabola.**
- ✓ **C l'ulteriore intersezione di r con la seconda parabola.**
- ✓ **D l'intersezione di r con l'asse delle ordinate.**

Si determini il coefficiente angolare m di r in modo che risulti

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{k}{AD}$$

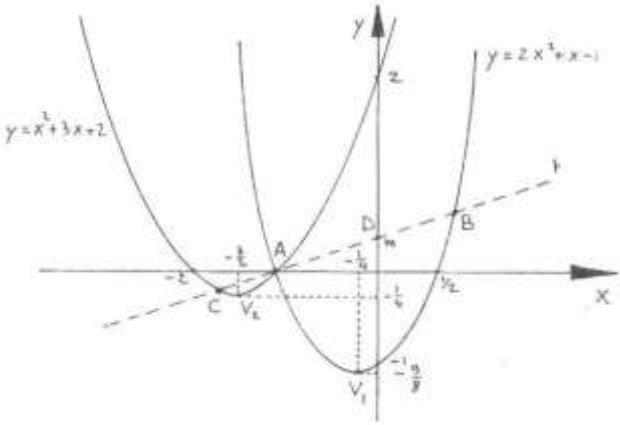
Essendo k un numero reale assegnato.

Nel caso di k positivo si determini l'eventuale massimo di k al variare di m.

Le due parabole hanno i vertici nei punti

$$V_1 \equiv \left(-\frac{1}{4};-\frac{9}{8}\right) \qquad V_2 \equiv \left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$$

Asse verticale e concavità rivolta verso l'alto.



Il fascio di rette passanti per A ha equazione

$$y = mx + m$$

ne consegue che

$$B \equiv \left(\frac{m+1}{2}; \frac{m^2+3m}{2} \right)$$

$$C \equiv \left(m-2; m^2-m \right)$$

$$D \equiv \left(0; m \right)$$

Calcoliamo la lunghezza dei segmenti AB, AD, AC

$$AB = \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}+1 \right)^2 + \left(\frac{m^2+3m}{2} \right)^2} = \frac{(m+3)\sqrt{m^2+1}}{2}$$

$$AD = \sqrt{m^2+1}$$

$$AC = \sqrt{\left(m-2+1 \right)^2 + \left(m^2-m \right)^2} = (m-1)\sqrt{m^2+1}$$

Applichiamo la relazione del problema

$$\frac{2}{(m+3)\sqrt{m^2+1}} - \frac{1}{(m-1)\sqrt{m^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\frac{2}{m+3} - \frac{1}{m-1} = k$$

Sotto le condizioni $m \neq 1$ e $m \neq -3$ si ha infine

$$\boxed{\begin{array}{l} km^2 - m(1-2k) + (5-3k) = 0 \\ -\infty < m < \infty \qquad m \neq 1, m \neq -3 \end{array}}$$

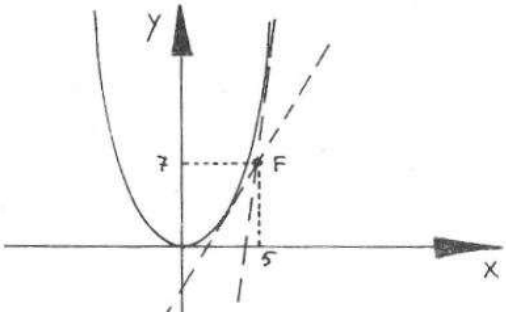
Poniamo

$$\begin{cases} m = x \\ m^2 = y \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1-2k}{k}x + \dfrac{3k-5}{k} \end{cases}$$

Cioè una parabola e un fascio di rette con centro $F \equiv (5;7)$ come si può ricavare con il criterio dei due valori arbitrari a k, oppure con l'altro metodo alternativo esposto nel problema precedente.



Si avranno sempre due soluzioni per

$$\Delta = \left(\frac{1-2k}{k}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3k-5}{k} \geq 0$$

Cioè

$$\begin{cases} k \leq \dfrac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ k \geq \dfrac{3+2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Eccetto che per k = 0 per cui si ha una sola soluzione (retta verticale).
Riprendiamo in esame la funzione

$$k = \frac{2}{m+3} - \frac{1}{m-1}$$

E troviamone il massimo. La derivata è

$$k' = -\frac{2}{(m+3)^2} + \frac{1}{(m-1)^2}$$

Uguagliando a zero e risolvendo si ha

$$-m^2 + 10m + 7 = 0 \qquad m = \begin{cases} 5 - 4\sqrt{2} \\ 5 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Si ha dunque il massimo cercato per

$$\boxed{m = 5 + 4\sqrt{2}}$$

In corrispondenza del quale è

$$k = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}.$$