Settembre 1958

E' dato un trapezio ABCD rettangolo in A e in D, avente le basi AB e DC e l'altezza AD rispettivamente uguali a 5a, 4a, 2a.
Se con P si denota un punto interno al trapezio, di cui H e K sono le proiezioni ortogonali su BC e su AD, si trovi P in modo che siano soddisfatte le relazioni

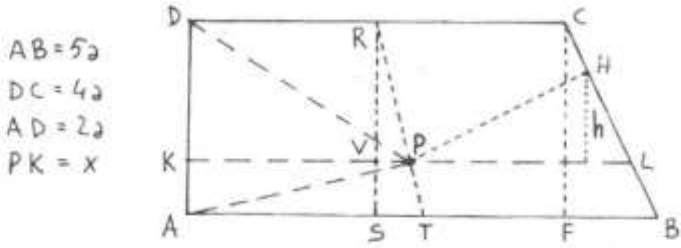
$$\frac{PH}{PK} = \frac{AD}{BC} \qquad AP^2 + DP^2 = ka^2$$

Essendo k un numero positivo dato. Discussione.

Risulta

$$BC = \sqrt{FC^2 + FB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

Poniamo PK = x.



Dalla prima relazione del problema si ricava

$$PH = \frac{PK \cdot AD}{BC} = \frac{x \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$$

I due triangoli CFB e PHL sono simili (perché rettangoli e con lati a due a due perpendicolari fra loro). Ne deriva che

$$CF : BC = PH : PL$$

$$PL = \frac{BC \cdot PH}{CF} = \frac{a\sqrt{5}\,\frac{2x\sqrt{5}}{5}}{2a} = x$$

E quindi

$$\boxed{PK = PL}$$

La prima relazione impone dunque al punto P di scorrere sul segmento RT avente per estremi i punti medi delle due basi del trapezio.
Anche i triangoli RST e RVP sono simili fra loro (ma non ai due precedenti). Essendo

$$RS = 2a$$

$$ST = \frac{5}{2}a - 2a = \frac{a}{2}$$

$$PV = x - 2a$$

Si ricava

$$RV : VP = RS : ST$$

$$RV = \frac{VP \cdot RS}{ST} = \frac{(x-2a)a}{a/2} = 4(x-2a)$$

E perciò

$$DK = 4x - 8a$$

$$AK = 2a - (4x - 8a) = 10a - 4x$$

Ed infine

$$\begin{cases} PD^2 = DK^2 + PK^2 = 17x^2 - 64ax + 64a^2 \\ AP^2 = AK^2 + PK^2 = 17x^2 - 80ax + 100a^2 \end{cases}$$

Applicando la seconda relazione del problema, si ha

$$AP^2 + PD^2 = ka^2$$

Cioè

$$\boxed{34x^2 - 144ax + a^2(164 - k) = 0}$$

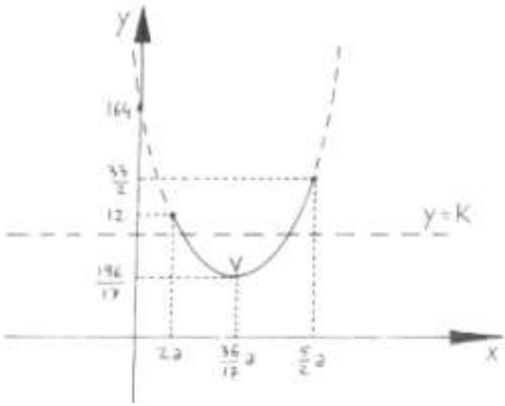
Quando P = R è x = 2a, e quando P = T è $x = \frac{5}{2}a$, quindi

$$\boxed{2a < x < \frac{5}{2}a \quad (\text{con}\, a > 0)}$$

Ponendo k = y si ha

$$\begin{cases} y = \frac{34}{a^2}x^2 - \frac{144}{a}x + 164 \\ y = k \end{cases}$$

Cioè un arco di parabola con ascisse comprese fra 2a e $\frac{5}{2}a$, e un fascio di rette orizzontali.



Si hanno due soluzioni per

$$\boxed{\frac{196}{17} \le k < 12}$$

E una soluzione per

$$\boxed{12 \le k < \frac{33}{2}}.$$