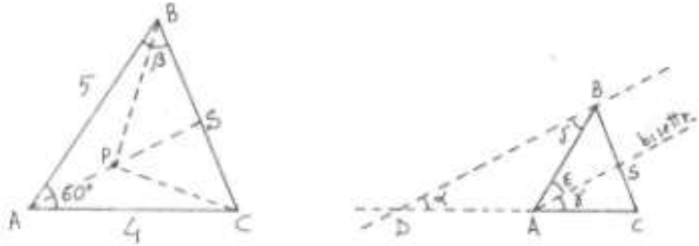
Luglio 1959

Il triangolo ABC ha i lati AB e AC di lunghezza rispettivamente 5 e 4 e l'angolo fra essi compreso è i 60°. La bisettrice dell'angolo A del triangolo interseca il lato opposto in S.
Calcolare la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso è diviso dal punto S e successivamente si determini il coseno dell'angolo ABC e quindi la lunghezza di AS.
Ciò fatto, si trovi sul segmento AS un punto P tale che la somma dei quadrati delle distanze dai tre vertici del triangolo sia equivalente ad un quadrato di lato k. Discussione.
Facoltativamente si risolva il problema per via geometrica.

Con Carnot

$$BC = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60} = \sqrt{21}$$



Prima di proseguire osserviamo la costruzione realizzata nella figura di destra: tracciamo la retta passante per B e parallela alla bisettrice, e prolunghiamo AC fino ad incontrare in D la retta precedente.
Il triangolo ABD è isoscele perché gli angoli α e γ sono corrispondenti e quindi uguali fra loro.
Gli angoli ε e δ sono anch'essi uguali fra loro perché alterni interni.
Essendo ε = γ risulta anche α = δ e il triangolo è isoscele.
Inoltre per il teorema i Talete (fascio di rette tagliate da due trasversali), si ha

$$AC : AD = CS : SB$$

Ma, essendo isoscele ABD, si può anche scrivere

$$AC : AB = CS : SB$$

Poniamo ora BS = x. La proporzione diviene

$$4:5=\left(\sqrt{21}-x\right):x \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{5\sqrt{21}}{9}$$

E quindi

$$\boxed{BS=\frac{5\sqrt{21}}{9} \qquad\qquad SC=\frac{4\sqrt{21}}{9}}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot per calcolare cos β.

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\beta$$

$$16=25+21-2\cdot 5\cdot\sqrt{21}\cdot\cos\beta$$ applichiamo ancora Carnot per

$$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

determinare AS:

$$AS=\sqrt{AB^2+BS^2-2\cdot AB\cdot BS\cdot\cos\beta}=\frac{20\sqrt{3}}{9}$$

Passiamo ora alla seconda parte del problema ponendo

$$AP=x \qquad \left(\text{con} \quad 0\le x\le\frac{20\sqrt{3}}{9}\right)$$

Calcoliamo PB^2 e PC^2 applicando nuovamente il teorema di Carnot.

$$\begin{cases} PB^2=AP^2+AB^2-2\cdot AP\cdot AB\cdot\cos 30=x^2-5x\sqrt{3}+25 \\ PC^2=AP^2+AC^2-2\cdot AP\cdot AC\cdot\cos 30=x^2-4x\sqrt{3}+16 \end{cases}$$

Imponiamo finalmente la relazione indicata dal problema

$$AP^2 + PB^2 + PC^2 = k^2$$

Si ottiene

$$\boxed{\begin{array}{c} 3x^2-9x\sqrt{3}+41-k^2=0 \\ 0\le x\le\dfrac{20\sqrt{3}}{9} \end{array}}$$

Eseguiamo la discussione geometrica ponendo $k^2 = y$. Si ha

$$\begin{cases} y=3x^2-9x\sqrt{3}+41 \\ y=k^2 \end{cases}$$

Cioè un arco di parabola con asse verticale diretto verso l’alto, vertice nel punto

$$V \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{83}{4} \right)$$

E di cui dovremo considerare solo l'arco con ascisse comprese fra 0 e $\frac{20\sqrt{3}}{9}$, e un fascio di rette orizzontali.

Come si vede dalla figura seguente, si hanno due soluzioni per

$$\frac{83}{4} \leq k^2 \leq \frac{229}{9}$$

E una soluzione per

$$\frac{229}{9} < k^2 \leq 41$$