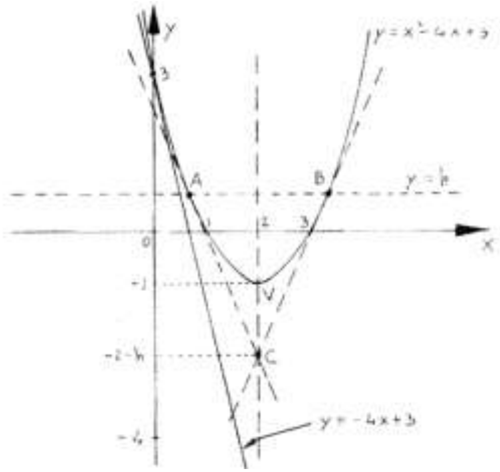
Settembre 1959

Riferiti i punti di un piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, si disegni la parabola di equazione

$$y = x^2 - 4x + 3$$

e si scriva l'equazione della tangente ad essa nel punto di intersezione con l'asse delle y. Successivamente:

a) **Segata la curva con una retta generica di equazione y = h, si dimostri analiticamente o geometricamente che le tangenti alla parabola nei punti d'intersezione con la retta considerata, s'incontrano in punti aventi la stessa ascissa.**
b) **Si determini poi h in modo che l'intersezione fra le due tangenti abbia ordinata – 4.**
c) **Segata infine la parabola con una retta generica parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si discutano i segni delle ascisse delle intersezioni nel caso che queste risultino reali.**



La derivata della parabola è

$$y' = 2x - 4$$

il coefficiente angolare della retta tangente è

$$f'(0) = -4$$

e quindi la retta tangente ha equazione

$$y - 3 = m(x - 0) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{y = -4x + 3}$$

Rispondiamo al quesito a). La parabola è simmetrica rispetto al suo asse (di equazione x = 2) e la generica retta orizzontale y = h taglia la parabola in due punti (A e B) tali che le rette tangenti ala parabola in tali punti hanno coefficiente angolare ma di segno opposto.
I punti di intersezione delle due rette tangenti debbono giacere sull'asse della parabola e hanno perciò ascissa uguale a 2. Analiticamente si ha

$$\begin{cases} A \equiv \left(2-\sqrt{1+h};h\right) \\ B \equiv \left(2+\sqrt{1+h};h\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'\left(2-\sqrt{1+h}\right) = -2\sqrt{1+h} \\ f'\left(2+\sqrt{1+h}\right) = 2\sqrt{1+h} \end{cases}$$

Le due rette tangenti in A e in B hanno equazione

$$\begin{cases} y-h = -2\sqrt{1+h}\left(x-2+\sqrt{1+h}\right) \\ y-h = 2\sqrt{1+h}\left(x-2-\sqrt{1+h}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2\sqrt{1+h}\left(x-2\right)-2-h \\ y = 2\sqrt{1+h}\left(x-2\right)-2-h \end{cases}$$

Risolvendo il sistema per confronto si ha x = 2 qualunque sia il valore di h, quindi il punto C ha sempre ascissa x = 2.
Sostituendo tale valore in una delle due rette tangenti, si determina anche l'ordinata del punto C

$$y = 2\sqrt{1+h}\left(2-2\right)-2-h = -2-h \quad \rightarrow \quad C \equiv \left(2;-2-h\right)$$

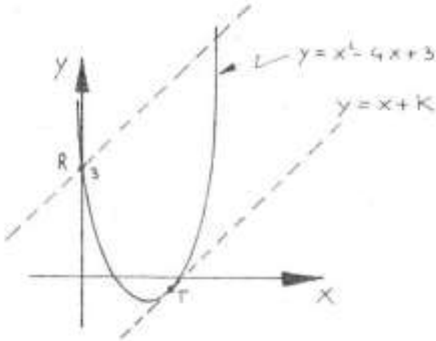
Imponendo che l'ordinata di C sia uguale a – 4, si ha la risposta al quesito b)

$$-2-h = -4 \quad \rightarrow \quad \boxed{h=2}$$

Rispondiamo all'ultimo quesito mettendo a sistema la parabola con il fascio di rette parallele

$$y = x + h$$

la retta del fascio passa per R quando k = 3.



Si ha la tangenza in T per

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x + k \end{cases} \rightarrow x^2 - 5x + 3 - k = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow k = -\frac{13}{4}$$

Quindi avremo la situazione seguente